Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^{o}. Edson

1^{o} Semestre

Gabarito 2ª Prova **2013**
Data: Terça-feira, 18 de Fevereiro **Turma M3**

Exercício 1

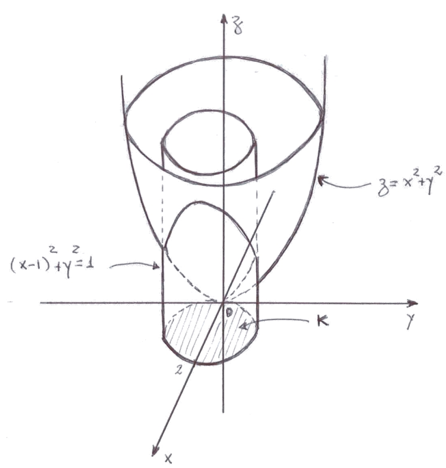
a). *Desejamos calcular a integral*

$$I=\int_0^2\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}}\int_0^{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx$$

Observe inicialmente que, seu domínio de integração é dado por

$$\Omega:\begin{cases}0\le x\le 2\\ -\sqrt{2x-x^2}\le y\le\sqrt{2x-x^2}\\ 0\le z\le x^2+y^2\end{cases}$$

e, realizando um esboço desta região obtemos a seguinte figura



Usando coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\,\mathrm{sen}\,\theta\\ z=z\end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right|=r,$$

percebe-se que a região em questão pode ser representada da seguinte forma

$$\Omega:\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\\ 0\le r\le 2\cos\theta\\ 0\le z\le r^2\end{cases}$$

Portanto,

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta}\int_0^{r^2} r\cdot r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta} r^2z\Big|_0^{r^2}\,dr\,d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta} r^4dr\,d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{r^5}{5}\Big|_0^{2\cos\theta}\,d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{32\cos^5\theta}{5}d\theta$$

$$=\frac{32}{5}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2\theta\right)^2\cos\theta d\theta$$

$$=\frac{32}{5}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\mathrm{sen}^2\theta\right)^2\cos\theta d\theta$$

$$=\frac{32}{5}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\theta-2\mathrm{sen}^2\theta\cos\theta+\mathrm{sen}^4\theta\cos\theta\right)d\theta$$

$$=\frac{32}{5}\left(\mathrm{sen}\,\theta-\frac{2}{3}\mathrm{sen}^3\theta+\frac{1}{5}\mathrm{sen}^5\theta\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{512}{75}\qquad\square$$

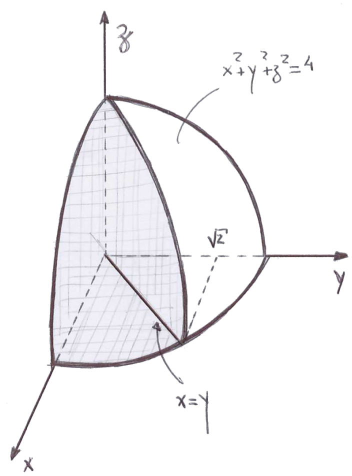
b). *Desejamos agora, calcular a integral*

$$I = \int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz\,dx\,dy$$

A região de integração é dada por

$$\Omega : \begin{cases} y \leq x \leq \sqrt{4-y^2} \\ 0 \leq y \leq \sqrt{2} \\ 0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2} \end{cases}$$

e, realizando um esboço desta, teremos a seguinte figura



Usando coordenadas esféricas,

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho \operatorname{sen}\varphi \end{cases}$$

cujo jacobiano é dado por

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}\right| = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi$$

esta mesma região, pode ser representada da seguinte forma

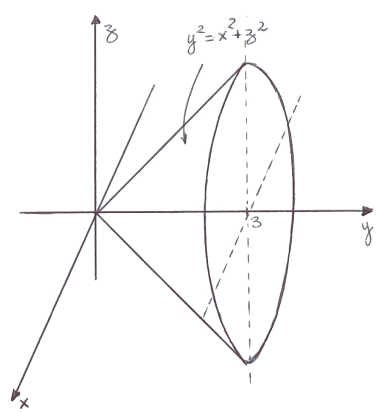
$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 2 \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \rho \cdot \rho^2 \operatorname{sen}\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^4}{4} \operatorname{sen}\varphi \Big|_0^2 d\varphi\, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi\, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} -4\cos\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4 d\theta \\ &= \pi \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Fazendo um esboço da região dada, obtemos a seguinte figura*



Usando as coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = y \\ z = r \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

cujo jacobiano é dado por

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,y)}\right| = r$$

Podemos descrever esta região, da seguinte forma

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 3 \\ r \leq y \leq 3 \end{cases}$$

Observe que a distância de um ponto (x, y, z) *ao eixo* y *é dado por*

$$d = \sqrt{x^2 + z^2}$$

Desta forma segue-se que, o momento de inércia deste sólido, quando girando em torno do eixo y, será

$$I = \iiint_\Omega d^2 dm$$

$$= \iiint_\Omega (x^2 + y^2) k \, dx \, dy \, dz$$

$$= k \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_r^3 r^2 \cdot r \, dy \, d\theta \, dr$$

$$= k \int_0^3 \int_0^{2\pi} r^3 y \Big|_r^3 d\theta \, dr$$

$$= k \int_0^3 \int_0^{2\pi} \left(3r^3 - r^4\right) d\theta \, dr$$

$$= k \int_0^3 2\pi \left(3r^3 - r^4\right) dr$$

$$= 2k\pi \left(\frac{3}{4} r^4 - \frac{r^5}{5}\right)\Big|_0^3$$

$$= \frac{243\pi k}{10}$$

■

Exercício 3 *O segmento de reta do ponto* $(3, 0, 0)$ *ao ponto* $(3, 0, 4)$*, pode ser parametrizado da seguinte forma*

$$\gamma(t) = (3, 0, 0) + [(3, 0, 4) - (3, 0, 0)] \, t$$

$$= (3, 0, 4t)$$

onde $0 \leq t \leq 1$*. Logo, o trabalho realizado pelo campo vetorial*

$$F(x, y, z) = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ao mover uma partícula ao longo do segmento dado, será

$$\tau = \int_\gamma F \cdot d\gamma$$

$$= \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

$$= \int_0^1 F(3, 0, 4t) \cdot (0, 0, 4) dt$$

$$= \int_0^1 \frac{16t}{(9 + 16t^2)^{\frac{3}{2}}} dt$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{16t^2 + 9}}\Big|_0^1$$

$$= -\frac{1}{5} + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{2}{15}$$

■

Exercício 4 *De acordo com o enunciado do problema, a densidade do arame num ponto* (x, y, z) *é dada por*

$$\delta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

e, sendo a forma do arame a hélice

$$\gamma(t) = (t, \cos t, \operatorname{sen} t), \; 0 \leq t \leq 2\pi$$

Segue-se que sua massa será

$$m = \int_\gamma \delta \, ds$$

$$= \int_0^{2\pi} \delta(\gamma(t)) \, \|\gamma'(t)\| \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \delta(t, \cos t, \operatorname{sen} t) \, \|(1, -\operatorname{sen} t, \cos t)\| \, dt$$

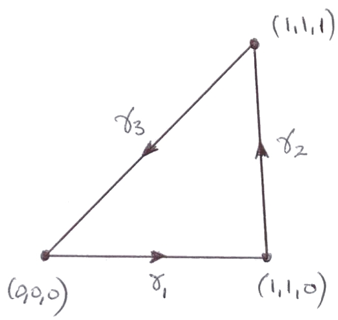
$$= \int_0^{2\pi} \left(t^2+1\right)\sqrt{2}dt$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{t^3}{3}+t\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{8\pi^3}{3}+2\pi\right)$$

■

Exercício 5 *Considere a curva γ composta pelos segmentos de reta γ_1, γ_2 e γ_3 conforme a figura abaixo*



A parametrização de cada um destes segmentos pode ser obtida da seguinte maneira

$$\gamma_1(t) = (0,0,0) + [(1,1,0)-(0,0,0)]\,t$$

$$= (t,t,0)$$

$$\gamma_2(t) = (1,1,0) + [(1,1,1)-(1,1,0)]t$$

$$= (1,1,t)$$

$$\gamma_3(t) = (1,1,1) + [(0,0,0)-(1,1,1)]t$$

$$= (1-t,1-t,1-t)$$

onde $0 \le t \le 1$. Portanto, segue-se que

$$I = \int_\gamma x^2zdx - yx^2dy + 3dz$$

$$= \int_{\gamma_1} x^2zdx - yx^2dy + 3dz + \int_{\gamma_2} x^2zdx - yx^2dy + 3dz + \int_{\gamma_3} x^2zdx - yx^2dy + 3dz$$

$$= \int_0^1 -t^3dt + \int_0^1 3dt + \int_0^1 \left[-(1-t)^3dt + (1-t)^3dt - 3dt\right]$$

$$= \int_0^1 -t^3dt$$

$$= -\frac{t^4}{4}\Big|_0^1$$

$$= -\frac{1}{4}$$

■