

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof. Edson

1º Semestre

Gabarito 1ª Prova
Data: Sexta-feira, 2 de Agosto

2013
Turma M3

Exercício 1

a).

$$\begin{aligned} \int_1^4 \int_{x^2}^x \sqrt{\frac{y}{x}} dy dx &= \int_1^4 \int_{x^2}^x \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} dy dx \\ &= \int_1^4 \left. \frac{2}{3} \frac{\sqrt{y^3}}{\sqrt{x}} \right|_{x^2}^x dx \\ &= \frac{2}{3} \int_1^4 \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt{x^6}}{\sqrt{x}} dx \\ &= \frac{2}{3} \int_1^4 \left(x - x^{\frac{5}{2}} \right) dx \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{2}{7} \sqrt{x^7} \right) \Big|_1^4 \\ &= \frac{2}{3} \left(-\frac{200}{7} - \frac{3}{14} \right) \\ &= -\frac{403}{21} \end{aligned}$$

□

b).

$$\begin{aligned} \int_0^3 \int_0^x x^2 e^{xy} dy dx &= \int_0^3 x^2 \left. \frac{1}{x} e^{xy} \right|_0^x dx \\ &= \int_0^3 \left(x e^{x^2} - x \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{x^2} - x^2 \right) \Big|_0^3 \\ &= \frac{1}{2} (e^9 - 9) - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\int_0^3 \int_0^x x^2 e^{xy} dy dx = \frac{e^9}{2} - 5$$

■

Exercício 2

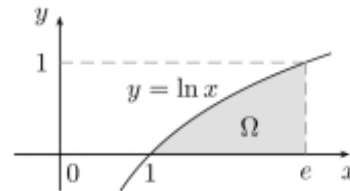
a). Desejamos inverter a ordem de integração da seguinte integral

$$\int_1^e \int_0^{\ln x} f(x, y) dy dx$$

Para isto, observe que o domínio de integração é

$$\Omega : \begin{cases} 1 \leq x \leq e \\ 0 \leq y \leq \ln x \end{cases}$$

cujo gráfico pode ser esboçado da seguinte maneira



Observe porém, que o conjunto Ω pode também ser descrito da seguinte maneira

$$\Omega : \begin{cases} e^y \leq x \leq e \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

Ou seja,

$$\int_1^e \int_0^{\ln x} f(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_{e^y}^e f(x, y) dx dy$$

□

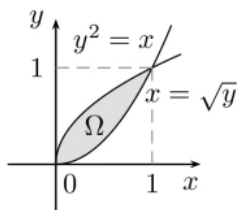
b). Desejamos agora, inverter a ordem de integração da integral

$$\int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx dy$$

De modo semelhante ao que foi feito no item anterior, observe que o domínio de integração é o conjunto

$$\Omega : \begin{cases} y^2 \leq x \leq \sqrt{y} \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

cujos esboço é dado pela seguinte figura



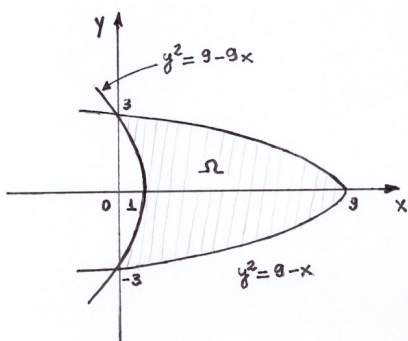
Observe que o conjunto Ω pode ser descrito também, da seguinte forma

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq \sqrt{x} \end{cases}$$

Ou seja

$$\int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy dx$$

Exercício 3 A região plana Ω compreendida entre as curvas $y^2 = 9 - x$ e $y^2 = 9 - 9x$ pode ser visualizada no seguinte esboço



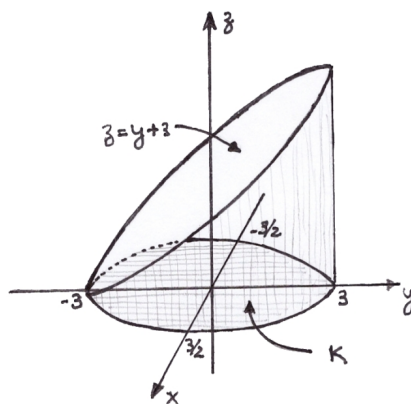
Observe então, que a região Ω pode ser descrita do seguinte modo

$$\Omega : \begin{cases} \frac{9 - y^2}{9} \leq x \leq 9 - y^2 \\ -3 \leq y \leq 3 \end{cases}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \text{Área}(\Omega) &= \iint_{\Omega} dx dy \\ &= \int_{-3}^3 \int_{\frac{9-y^2}{9}}^{9-y^2} dx dy \\ &= \int_{-3}^3 x \Big|_{\frac{9-y^2}{9}}^{9-y^2} dy \\ &= \frac{1}{9} \int_{-3}^3 (72 - 8y^2) dy \\ &= \frac{1}{9} \left(72y - \frac{8}{3}y^3 \right) \Big|_{-3}^3 \\ &= \frac{144 + 144}{9} \\ &= 32 \end{aligned}$$

Exercício 4 Observe que o sólido Ω delimitado pelo cilindro $4x^2 + y^2 = 9$ e os planos $z = 0$ e $z = y + 3$ possui o seguinte esboço



Assim, segue-se que o volume V deste sólido é dado por

$$V = \iint_K (y + 3) dx dy$$

onde K é o conjunto dos pontos (x, y) tais que

$$4x^2 + y^2 \leq 9 \Leftrightarrow \left(\frac{2x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 \leq 1$$

Usando coordenadas polares, tome

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2}r \cos \theta \\ y = 3r \sin \theta \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{3}{2}\cos \theta & -\frac{3}{2}r \sin \theta \\ 3\sin \theta & 3r \cos \theta \end{vmatrix} = \frac{9}{2}r$$

Assim, neste novo sistema de coordenadas, o conjunto K pode ser descrito do seguinte modo

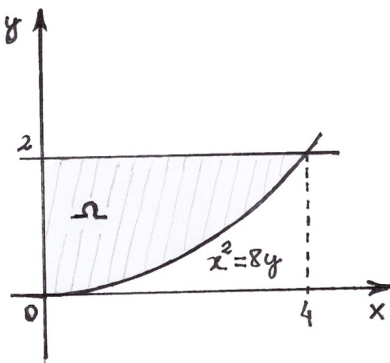
$$K : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$$

e, portanto, segue-se que

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (3r \sin \theta + 3) \frac{9}{2}r \, dr \, d\theta \\ &= \frac{27}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 \sin \theta + r) \, dr \, d\theta \\ &= \frac{27}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3}r^3 \sin \theta + \frac{1}{2}r^2 \right) \Big|_0^1 d\theta \\ &= \frac{27}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3} \sin \theta + \frac{1}{2} \right) d\theta \\ &= \frac{27}{2} \left(-\frac{1}{3} \cos \theta + \frac{1}{2} \theta \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{27\pi}{2} \end{aligned}$$

■

Exercício 5 Observe que a lâmina que tem a forma da região do primeiro quadrante, delimitada pelas curvas $x^2 = 8y$, $y = 2$ e pelo eixo y possui o seguinte esboço



onde

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ \frac{x^2}{8} \leq y \leq 2 \end{cases}$$

A densidade dessa lâmina em cada ponto (x, y) é diretamente proporcional à distância deste ponto à reta $y = -1$, ou seja

$$\delta(x, y) = k(y + 1)$$

Assim, a massa dessa lâmina será

$$\begin{aligned} M &= \iint_{\Omega} \delta(x, y) \, dx \, dy \\ &= \int_0^4 \int_{\frac{x^2}{8}}^2 k(y + 1) \, dy \, dx \\ &= k \int_0^4 \left(\frac{1}{2}y^2 + y \right) \Big|_{\frac{x^2}{8}}^2 dx \\ &= k \int_0^4 \left(4 - \frac{x^4}{128} - \frac{x^2}{8} \right) dx \\ &= k \left(4x - \frac{x^5}{640} - \frac{x^3}{24} \right) \Big|_0^4 \\ &= \frac{176k}{15} \end{aligned}$$

E, o centro de massa, será (x_c, y_c) onde

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{1}{M} \iint_{\Omega} x \delta(x, y) \, dx \, dy \\ &= \frac{15}{176k} \iint_{\Omega} kx(y + 1) \, dx \, dy \\ &= \frac{15}{176} \iint_{\Omega} x(y + 1) \, dx \, dy \\ &= \frac{15}{176} \int_0^4 \int_{\frac{x^2}{8}}^2 x(y + 1) \, dy \, dx \\ &= \frac{15}{176} \frac{56}{3} \\ &= \frac{35}{22} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}y_c &= \frac{1}{M} \iint_{\Omega} y \delta(x, y) dx dy \\&= \frac{15}{176k} \iint_{\Omega} ky(y+1) dx dy \\&= \frac{15}{176} \iint_{\Omega} y(y+1) dx dy \\&= \frac{15}{176} \int_0^4 \int_{\frac{x^2}{8}}^2 y(y+1) dy dx \\&= \frac{15}{176} \frac{544}{35} \\&= \frac{102}{77}\end{aligned}$$

■