Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^o. Edson

1^o Semestre

Gabarito Prova Final **2012**
Data: Quinta-feira, 22 de Novembro **Turma 13**

Exercício 1 *Observe que a equação do cilindro dado pode ser reescrita da seguinte maneira*

$$x^2 + y^2 = 2x \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$$

Logo, o volume do sólido em questão é dado por

$$V = \iiint_B dx\,dy\,dz$$

onde

$$B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| (x-1)^2 + y^2 \le 1,\ 0 \le z \le x^2 + y^2\right\}$$

Ou seja

$$V = \iint_K \int_0^{x^2+y^2} dy\,dx\,dy$$

$$= \iint_K (x^2+y^2) dx\,dy$$

onde

$$K = \left\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle|\, (x-1)^2 + y^2 \le 1\right\}$$

Usando coordenadas polares, considere

$$\begin{cases} x - 1 = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

e observe que

$$|J| = r$$

e, o conjunto K é transformado por está mudança, no conjunto

$$K' : \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$$

e disto, segue-se que

$$V = \iint_K (x^2+y^2) dx\,dy$$

$$= \iint_{K'} \left[(1 + r\cos\theta)^2 + r^2\mathrm{sen}^2\theta\right] r\,dr\,d\theta$$

$$= \iint_{K'} \left(1 + 2r\cos\theta + r^2\right) r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r + 2r^2\cos\theta + r^3)\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{3}{2}\pi$$

■

Exercício 2 *Uma parametrização possível para a superfície dada é*

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + v \end{cases}, (u,v) \in K$$

onde K é a região delimitada pelo triângulo de vértices $(0,0), (1,0)$ e $(0,2)$, ou seja

$$K : \begin{cases} 0 \le u \le 1 \\ 0 \le v \le -2u + 2 \end{cases}$$

Segue-se portanto, que

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) = (1,0,2u)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v) = (0,1,1)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v) = (-2u,-1,1)$$

$$\left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v)\right\| = \sqrt{4u^2+2}$$

donde, temos que, a área procurada é dada por

$$
\begin{aligned}
A &= \iint_\sigma ds \\
&= \iint_K \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) \right\| du\,dv \\
&= \iint_K \sqrt{4u^2+2}du\,dv \\
&= \int_0^1 \int_0^{-2u+2} \sqrt{4u^2+2}dv\,du \\
&= \int_0^1 (-2u+2)\sqrt{4u^2+2}du \\
&= \ln\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) + \frac{1}{3}\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

■

Exercício 3 *O trabalho realizado pelo campo*

$$\mathbf{F}(x,y) = x\mathbf{i} + (y+2)\mathbf{j}$$

para movimentar um objeto sobre um arco de ciclóide dado por

$$\mathbf{r}(t) = (t - \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (1-\cos t)\mathbf{j},\ 0 \le t \le 2\pi$$

pode ser calculado através da integral de linha

$$
\begin{aligned}
\tau &= \int_{\mathbf{r}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \\
&= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot \mathbf{r}'(t)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(t-\operatorname{sen} t, 1-\cos t)\cdot(1-\cos t, \operatorname{sen} t)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} (t-\operatorname{sen} t, 3-\cos t)\cdot(1-\cos t, \operatorname{sen} t)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} (t + 2\operatorname{sen} t - t\cos t)\ dt \\
&= 2\pi^2
\end{aligned}
$$

□

Uma outra maneira de resolver este problema seria, observarmos que

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(y+2) - \frac{\partial}{\partial y}(x) = 0$$

e

$$\boldsymbol{Domínio}(\mathbf{F}) = \mathbb{R}^2$$

O que nos permite afirmar que $\mathbf{F}$ *é um campo conservativo em* $\mathbb{R}^2$*, ou seja, existe uma função* $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$\nabla\varphi(x,y) = \mathbf{F}(x,y)$$

o que é equivalente a dizer que

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = x \\[2ex]
\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = y+2
\end{cases}
$$

donde, resolvendo este sistema de equações, obtemos

$$\varphi(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + 2y + c$$

onde $c \in \mathbb{R}$*. Agora, sendo* F *um campo conservativo, a integral para o cálculo do trabalho realizado para mover um objeto sobre uma curva, depende apenas dos pontos extremos desta curva. Assim, segue-se que*

$$
\begin{aligned}
\tau &= \int_{\mathbf{r}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \\
&= \varphi(\mathbf{r}(2\pi)) - \varphi(\mathbf{r}(0)) \\
&= \varphi(2\pi,0) - \varphi(0,0) \\
&= 2\pi^2
\end{aligned}
$$

■

Exercício 4 *Usando o* ***teorema de Green****, temos que*

$$
\begin{aligned}
I &= \int_\gamma xe^{-2x}\,dx + (x^4 + 2x^2y^2)\,dy \\
&= \iint_K \left[\frac{\partial}{\partial x}(x^4+2x^2y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(xe^{-2x})\right] dx\,dy \\
&= \iint_K 4x(x^2+y^2)dx\,dy
\end{aligned}
$$

onde

$$K = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \right\}$$

Usando coordenadas polares,

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array} \right.$$

temos que

$$|J| = r$$

e, o conjunto K será transformado no conjunto

$$K' : \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 1 \leq r \leq 2 \end{array} \right.$$

Portanto

$$I = \iint_K 4x(x^2+y^2)dx\,dy$$

$$= \iint_{K'} 4r\cos\theta\, r^2 r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_1^2 4\cos\theta\, r^4\, dr\, d\theta$$

$$= 0$$

■

Exercício 5 *Observe que*

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{F}(x,y,z) = \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & xyz \end{array} \right|$$

$$= (xz, -yz, 0)$$

O ***teorema de Stokes*** *enuncia que*

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\gamma = \iint_\sigma \mathrm{rot}\,\mathbf{F}\, ds$$

onde, em nosso caso, σ é a região do plano $2x+y+2z=2$ no primeiro octante. Uma parametrização possível seria

$$\sigma : \left\{ \begin{array}{l} x = u \\ y = v \\ z = \frac{1}{2}(2-2u-v) \end{array} \right. , (u,v) \in K$$

onde

$$K : \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq -2u+2 \end{array} \right.$$

Portanto

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) = (1,0,-1)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) = (0,1,-\tfrac{1}{2})$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) = (1,\tfrac{1}{2},1)$$

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) \right\| = \frac{3}{2}$$

Por fim, segue-se que

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\gamma = \iint_\sigma \mathrm{rot}\,\mathbf{F}\, ds$$

$$= \iint_K \mathrm{rot}\,\mathbf{F}(\sigma(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right) du\, dv$$

$$= \iint_K \mathrm{rot}\,\mathbf{F}(u,v,\frac{2-2u-v}{2}) \cdot (1,\frac{1}{2},1) du\, dv$$

$$= \frac{1}{4}\iint_K \left(-4u^2+4u+v^2-2v\right) du\, dv$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1\int_0^{-2u+2} \left(-4u^2+4u+v^2-2v\right) dv\, du$$

$$= 0$$

■