Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^{o}. Edson

1^{o} Semestre

Gabarito 3ª Prova **2012**
Data: Quinta-feira, 15 de Novembro **Turma 13**

Exercício 1 *A superfície em questão pode ser parametrizada da seguinte forma*

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{u^2+v^2} \end{cases} , (u,v) \in \Omega$$

onde

$$\Omega = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \middle| 1 \le u+v \le 2, u \ge 0, v \ge 0 \right\}$$

Assim, segue-se que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) = \left(1, 0, \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) = \left(0, 1, \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)$$

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) \right\| = \sqrt{2}$$

Portanto, a área desta superfície é dada por

$$\begin{aligned} A &= \iint_\sigma ds \\ &= \iint_\Omega \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) \right\| du\, dv \\ &= \sqrt{2} \iint_\Omega du\, dv \\ &= \sqrt{2} \cdot \textbf{Área}(\Omega) \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Uma parametrização possível para a superfície em questão é dada por*

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 4 - v^2 \end{cases} , (u,v) \in \Omega$$

sendo

$$\Omega = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 \le u \le 3, 0 \le v \le 3 \right\}$$

Assim, segue-se que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) = (1,0,0)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) = (0,1,-2v)$$

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) \right\| = \sqrt{4v^2+1}$$

e, a massa desta lâmina é dada por

$$\begin{aligned} M &= \iint_\sigma \delta(x,y,z) ds \\ &= \iint_\sigma y ds \\ &= \iint_\Omega v \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) \right\| du\, dv \\ &= \int_0^3 \int_0^3 v\sqrt{4v^2+1} dv\, du \\ &= \frac{1}{4}\left(\sqrt{37^3} - 1\right) \end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Usando o* ***teorema da Divergência de Gauss****, temos que*

$$\iint_\sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iiint_\mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{F}\, dx\, dy\, dz$$

onde ***B*** *é o sólido delimitado pelos gráficos de* $z = x^2 + y^2$ *e* $z = 4$*, ou seja*

$$\mathbf{B} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2 + y^2 \le z \le 4 \right\}$$

Assim, segue-se que

$$\iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iiint_{\mathbf{B}} dx\, dy\, dz$$

$$= \iint_{\mathbf{K}} \int_{x^2+y^2}^{4} dz\, dx\, dy$$

$$= \iint_{\mathbf{K}} \left[4 - (x^2 + y^2)\right] dx\, dy$$

onde

$$\mathbf{K} = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \big|\, x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Usando coordenadas polares, considere

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}, \ |J| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = r$$

*O conjunto **K** é transformado no conjunto*

$$\mathbf{K}' : \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

e, disto segue-se que

$$\iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_{\mathbf{K}} \left[4 - (x^2 + y^2)\right] dx\, dy$$

$$= \iint_{\mathbf{K}'} \left(4 - r^2\right) r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left(4 - r^2\right) r\, d\theta\, dr$$

$$= 8\pi$$

■

Exercício 4 *A superfície dada possui parametrização dada por*

$$\sigma : \begin{cases} x = 2\cos u \\ y = v \\ z = 2\mathrm{sen}\, u \end{cases}, \quad \begin{array}{c} 0 \leq u \leq \pi \\ 0 \leq v \leq 1 \end{array}$$

Logo

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) = (-2\mathrm{sen}\, u, 0, 2\cos u)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) = (0, 1, 0)$$

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right\| = 2$$

Assim, temos que

$$\iint_{\sigma} x^2 z^2 ds = \iint_{\Omega} 32\cos^2 u\, \mathrm{sen}^2 u\, du\, dv$$

onde

$$\Omega = \{\, (u, v) \in \mathbb{R}^2 \big|\, 0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq 1\}$$

Ou seja,

$$\iint_{\sigma} x^2 z^2 ds = 32 \iint_{\Omega} \cos^2 u\, \mathrm{sen}^2 u\, du\, dv$$

$$= 32 \int_0^{\pi} \int_0^1 \cos^2 u\, \mathrm{sen}^2 u\, dv\, du$$

$$= 4\pi$$

■

Exercício 5 *Pelo **teorema de Stokes**, temos que*

$$\iint_{\sigma} rot\, \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot dr$$

onde Γ é a curva fronteira da região delimitada pelo triângulo de vértices $(1, 0, 0), (0, 2, 0)$ e $(0, 0, 3)$.

Uma parametrização possível para esta curva pode ser dada da seguinte maneira

$$\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$$

onde

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = 0 \end{cases}, 0 \leq t \leq 1$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 - 2t \\ z = 3t \end{cases}, 0 \leq t \leq 1$$

$$\gamma_3 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 3 - 3t \end{cases}, 0 \leq t \leq 1$$

Portanto

$$\iint_{\sigma} rot\, \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot dr$$

$$= \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot dr + \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot dr + \int_{\gamma_3} \mathbf{F} \cdot dr$$

Resolvendo cada uma das integrais de forma separada, teremos

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot dr = \int_0^1 \mathbf{F}(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t)dt$$

$$= \int_0^1 \mathbf{F}(1-t, 2t, 0) \cdot (-1, 2, 0)dt$$

$$= 4\int_0^1 \left(t^3 - t^2\right) dt$$

$$= -\frac{1}{3}$$

$$\int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot dr = \int_0^1 \mathbf{F}(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t)dt$$

$$= \int_0^1 \mathbf{F}(0, 2-2t, 3t) \cdot (0, -2, 3)dt$$

$$= 36\int_0^1 \left(t^3 - t^2\right) dt$$

$$= -3$$

$$\int_{\gamma_3} \mathbf{F} \cdot dr = \int_0^1 \mathbf{F}(\gamma_3(t)) \cdot \gamma_3'(t)dt$$

$$= \int_0^1 \mathbf{F}(t, 0, 3-3t) \cdot (1, 0, -3)dt$$

$$= 9\int_0^1 \left(t^3 - t^2\right) dt$$

$$= -\frac{3}{4}$$

Logo, temos finalmente que

$$\iint_\sigma rot\, \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = -\frac{1}{3} - 3 - \frac{3}{4}$$

$$= -\frac{49}{12}$$

■