Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof$^{\text{o}}$. Edson

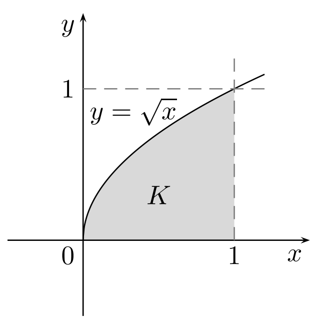
1$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito 2ª Prova **2012**
Data: Sexta-feira, 19 de Outubro **Turma 13**

Exercício 1 *Sabemos que **B** é a região do espaço que está abaixo do plano $z = 1 + x + y$ e acima da região do plano xy limitada pelas curvas $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ e $x = 1$. Assim, podemos expressar a região **B** da seguinte maneira:*

$$B : \begin{cases} 0 \le z \le 1 + x + y \\ (x, y) \in K \end{cases}$$

*onde **K** é a região esboçada abaixo:*



ou seja

$$K : \begin{cases} 0 \le y \le \sqrt{x} \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

portanto, seque-se que

$$\iiint_B 6xy\,dx\,dy\,dz = \iint_K \int_0^{1+x+y} 6xy\,dz\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} \int_0^{1+x+y} 6xy\,dz\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} 6xyz\Big|_0^{1+x+y} dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} 6xy(1 + x + y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} (6xy + 6x^2y + 6xy^2) dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left(3xy^2 + 3x^2y^2 + 2xy^3\right)\Big|_0^{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_0^1 \left(3x^2 + 3x^3 + 2x^{\frac{5}{2}}\right) dx$$

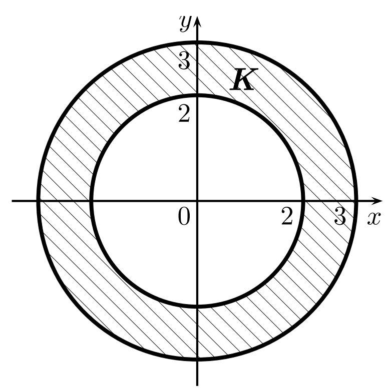
$$= \frac{65}{28}$$

$\blacksquare$

Exercício 2 *Observe que **B** pode ser expresso da seguinte forma*

$$B : \begin{cases} 0 \le z \le x + y + 3 \\ (x, y) \in K \end{cases}$$

*onde um esboço de **K** pode ser dado por*



Logo, usando coordenadas cilíndricas, ou seja

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$
$$z = z$$

cujo jacobiano é

$$|J| = r$$

poderemos expressar o conjunto $\boldsymbol{B}$ *da seguinte maneira*

$$B : \begin{cases} 2 \leq r \leq 3 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq r(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta) + 3 \end{cases}$$

e, com isto, segue-se que

$$\iiint_B x\,dx\,dy\,dz = \int_2^3\int_0^{2\pi}\int_0^{r(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)+3} r\cdot r\cos\theta\,dz\,d\theta\,dr$$

$$= \int_2^3\int_0^{2\pi} r^2\cos\theta\, z\Big|_0^{r(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)+3} d\theta\,dr$$

$$= \int_2^3\int_0^{2\pi} r^2\cos\theta\,[r(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)+3]d\theta\,dr$$

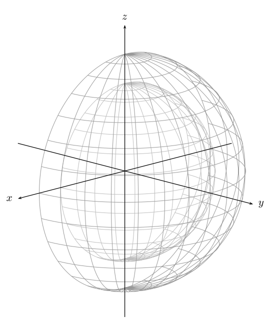
$$= \int_2^3 \pi r^3 dr$$

$$= \frac{\pi r^4}{4}\Big|_2^3$$

$$= \frac{65}{4}\pi$$

■

Exercício 3 *Um esboço do objeto dado no problema é dado pela seguinte figura*



de modo que, usando coordenadas esféricas, ou seja

$$x = \rho\operatorname{sen}\varphi\cos\theta$$
$$y = \rho\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta$$
$$z = \rho\cos\varphi$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \rho^2\operatorname{sen}\varphi$$

Podemos expressar este objeto assim

$$C : \begin{cases} 3 \leq \rho \leq 4 \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

Como o corpo é homogêneo, podemos considerar sua densidade dada por

$$\delta(x,y,z) = k,\ k \in \mathbb{R}$$

Portanto, segue-se que sua massa M é

$$M = \iiint_C \delta(x,y,z)dx\,dy\,dz$$

$$= \int_3^4\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} k\rho^2\operatorname{sen}\varphi d\theta\,d\varphi\,d\rho$$

$$= \int_3^4\int_0^{\pi} k\pi\rho^2\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi\,d\rho$$

$$= \int_3^4 -k\pi\rho^2\cos\varphi\Big|_0^{\pi} d\rho$$

$$= \int_3^4 2k\pi\rho^2 d\rho$$

$$= \frac{74k\pi}{3}$$

■

Exercício 4

a). A curva dada no problema pode ser parametrizada da seguinte maneira

$$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t),\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

Assim, se considerarmos

$$A = \int_\gamma (x^2+y^2)dx - xdy$$

segue-se que

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)\operatorname{sen} t\,dt - \cos t\cos t\,dt$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} t + \cos^2 t)\,dt$$

$$= -1 - \frac{\pi}{4}$$

□

b). Procedendo de maneira semelhante ao que foi feito no item anterior, temos que

$$\gamma(t) = (e^t, e^{3t}, e^{-t}),\ 0 \leq t \leq 1$$

e, novamente se considerarmos

$$B = \int_\gamma yzdx - xzdy + xydz$$

teremos

$$B = \int_0^1 e^{3t}e^{-t}e^t dt - 3e^t e^{-t} e^{3t} dt - e^t e^{3t} e^{-t} dt$$

$$= \int_0^1 (e^{3t} - 3e^{3t} - e^{3t}) dt$$

$$= -\int_0^1 3e^{3t} dt$$

$$= 1 - e^3$$

■

Exercício 5 *Observe que, para a curva*

$$\gamma(t) = (t, \lambda t(1-t)),$$

a partícula estará no ponto $(0,0)$ quando $t = 0$ e em $(1,0)$ quando $t = 1$. Assim, o trabalho realizado pelo campo de forças

$$\mathbf{F}(x,y) = xy\mathbf{i} + (x-y)\mathbf{j}$$

neste deslocamento, é dado por

$$\tau = \int_\gamma \mathbf{F} d\gamma$$

$$= \int_0^1 \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

$$= \int_0^1 \mathbf{F}(t, \lambda t(1-t)) \cdot (1, (1-2t)\lambda) dt$$

$$= \int_0^1 (\lambda t^2(1-t), t - \lambda t(1-t)) \cdot (1, (1-2t)\lambda) dt$$

$$= \int_0^1 \left[t^3(-2\lambda^2 - \lambda) + t^2(3\lambda^2 - \lambda) - t(\lambda^2 - \lambda) \right] dt$$

$$= -\frac{\lambda}{12}$$

Assim, para que tenhamos o trabalho relizado neste deslocamento, igual a 1, devemos ter então que

$$\lambda = -12$$

■