Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

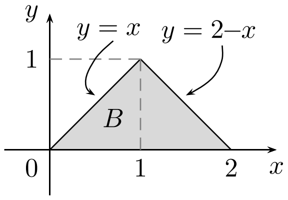
Prof^o. Edson

1^o Semestre

Gabarito 1ª Prova **2012**
Data: Domingo, 15 de Abril **Turma 13**

Exercício 1

a). Desenhando o conjunto B obtemos a seguinte figura:

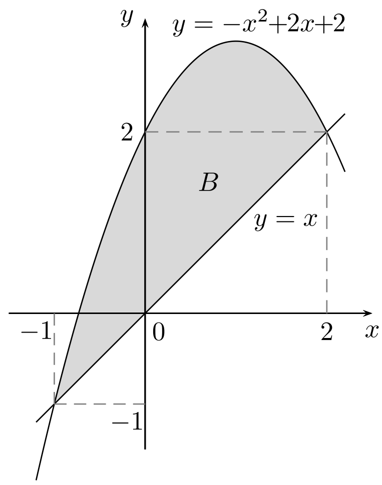


Assim, segue-se que

$$\iint_B f(x,y)dxdy =$$
$$= \int_0^1 \int_y^{2-y} x\,dxdy$$
$$= \int_0^1 \frac{x^2}{2}\Big|_y^{2-y} dy$$
$$= 2\int_0^1 (1-y)dy$$
$$= 2\left(y - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1$$
$$= 1$$

□

b). Desenhando o conjunto B obtemos a seguinte figura



De onde podemos concluir que

$$B: \begin{cases} -1 \le x \le 2 \\ x \le y \le -x^2+2x+2 \end{cases}$$

Ou seja,

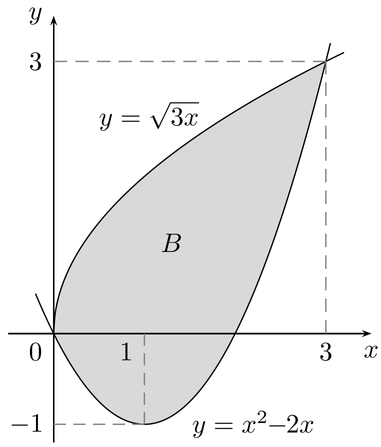
$$\iint_B f(x,y)\,dxdy = \int_{-1}^{2}\int_x^{-x^2+2x+2} x^2 dydx$$
$$= \int_{-1}^{2} x^2 y\Big|_x^{-x^2+2x+2} dx$$
$$= \int_{-1}^{2} \left(-x^4+x^3+2x^2\right)dx$$
$$= \frac{63}{20}$$

■

Exercício 2 *O domínio de integração na integral dada é o conjunto*

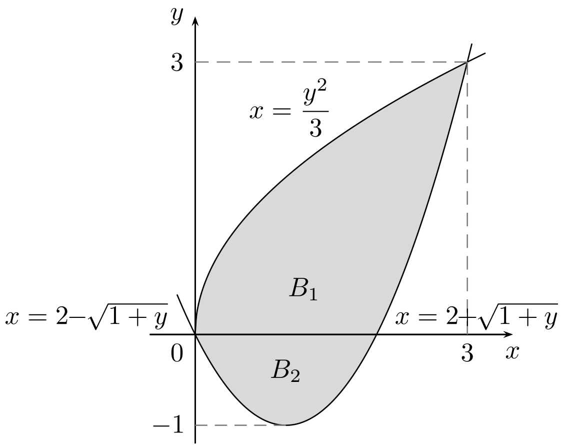
$$B: \begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ x^2-2x \le y \le \sqrt{3x} \end{cases}$$

Desenhando este conjunto, teremos a seguinte figura



Donde segue-se que o conjunto B pode ser reescrito como

$$B = B_1 \cup B_2$$



onde

$$B_1 : \begin{cases} \dfrac{y^2}{3} \leq x \leq 2 + \sqrt{1+y} \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases}$$

e

$$B_2 : \begin{cases} 2 - \sqrt{1+y} \leq x \leq 2 + \sqrt{1+y} \\ -1 \leq y \leq 0 \end{cases}$$

Portanto

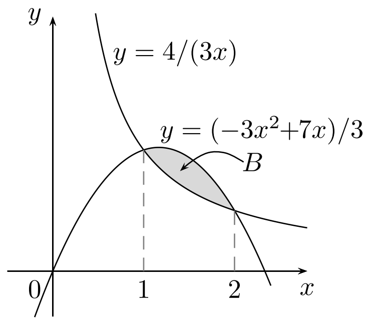
$$\int_0^3 \int_{x^2-2x}^{\sqrt{3x}} f(x,y)dydx = \iint_B f(x,y)dxdy$$

$$= \iint_{B_1} f(x,y)dxdy +$$
$$+ \iint_{B_2} f(x,y)dxdy$$

$$= \int_0^3 \int_{\frac{y^2}{3}}^{2+\sqrt{1+y}} f(x,y)dxdy +$$
$$+ \int_{-1}^0 \int_{2-\sqrt{1+y}}^{2+\sqrt{1+y}} f(x,y)dxdy$$

■

Exercício 3 *Desenhando o conjunto B, obtemos a seguinte figura*



Assim, segue-se que a área do conjunto B é dada por

$$\iint_B dxdy =$$

$$= \int_1^2 \int_{4/(3x)}^{(-3x^2+7x)/3} dydx$$

$$= \int_1^2 y \Big|_{4/(3x)}^{(-3x^2+7x)/3} dydx$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{-3x^2+7x}{3} - \frac{4}{3x} \right) dx$$

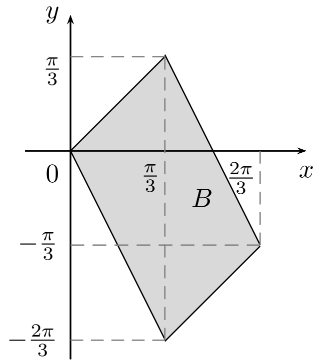
$$= \frac{1}{3} \int_1^2 \left(-3x^2 + 7x - \frac{4}{x} \right) dx$$

$$= \frac{1}{3} \left(-x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 4\ln x \right) \Big|_1^2$$

$$= \frac{7 - 8\ln 2}{6}$$

■

Exercício 4 *Desenhando o conjunto B obtemos a* *seguinte figura*



para calcularamos a integral em questão, usaremos a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = 2x + y \end{cases}$$

de onde segue-se que

$$\begin{cases} x = \dfrac{u+v}{3} \\ \\ y = \dfrac{-2u+v}{3} \end{cases}$$

e

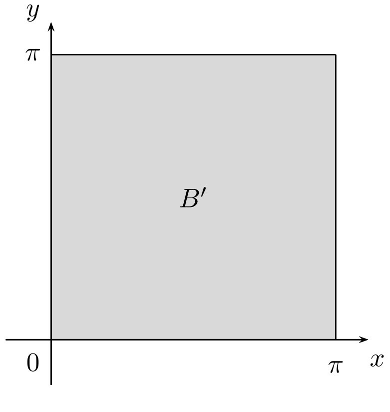
$$|J| = \left\| \begin{array}{cc} \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \\ \\ -\dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \end{array} \right\| = \frac{1}{3}$$

Observe que, nestas novas variáveis, as fronteiras do conjunto B tornam-se

$$\begin{array}{lll} y = x & \Rightarrow x - y = 0 & \Rightarrow u = 0 \\ y = x - \pi & \Rightarrow x - y = \pi & \Rightarrow u = \pi \\ y = -2x & \Rightarrow 2x + y = 0 & \Rightarrow v = 0 \\ y = -2x + \pi & \Rightarrow 2x + y = \pi & \Rightarrow v = \pi \end{array}$$

ou seja, B é transformado no conjunto

$$B' = \begin{cases} 0 \le u \le \pi \\ \\ 0 \le v \le \pi \end{cases}$$



Portanto, segue-se que

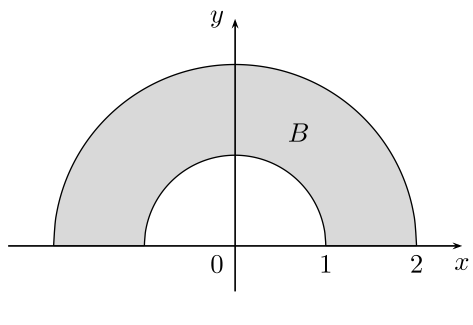
$$\begin{aligned} \iint_B (2x+y)\cos(x-y)\,dxdy &= \iint_{B'} \frac{1}{3} v\cos u\,dudv \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} v\cos u\,dvdu \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{\pi} \frac{v^2}{2}\cos u \Big|_0^{\pi} du \\ &= \frac{1}{3}\frac{\pi^2}{2}\int_0^{\pi} \cos u\,du \\ &= \frac{\pi^2}{6}\,\mathrm{sen}\,u\Big|_0^{\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Considerando*

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R} \,/\, 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ y \ge 0\right\}$$

e desenhando-o, obtemos o seguinte desenho



Usando coordenadas polares, ou seja

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

teremos

$$|J| = r$$

e, nestas coordenadas o conjunto B é transformado no conjunto

$$B' : \begin{cases} 1 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$$

Desta forma, como sabemos que

$$\delta(x,y) = k\sqrt{x^2+y^2},\ k \in \mathbb{R}$$

segue-se que

$$M(B) = \iint_B \delta(x,y)dxdy$$

$$= \iint_{B'} kr^2 dr d\theta$$

$$= k\int_0^\pi \int_1^2 r^2 dr d\theta$$

$$= k\int_0^\pi \left.\frac{r^3}{3}\right|_1^2 d\theta$$

$$= \frac{7k}{3}\int_0^\pi d\theta$$

$$= \frac{7k\pi}{3}$$

e disto, temos que

$$x_c = \frac{\iint_B x\delta(x,y)dxdy}{M(B)}$$

$$= \frac{3k\iint_B x\sqrt{x^2+y^2}dxdy}{7k\pi}$$

$$= \frac{3}{7\pi}\iint_B x\sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

$$= \frac{3}{7\pi}\iint_{B'} r\cos\theta r^2 dr\, d\theta$$

$$= \frac{3}{7\pi}\int_0^\pi \int_1^2 \cos\theta r^3 dr\, d\theta$$

$$= \frac{3}{7\pi}\int_0^\pi \cos\theta \left.\frac{r^4}{4}\right|_1^2 d\theta$$

$$= \frac{3}{7\pi}\frac{15}{4}\int_0^\pi \cos\theta d\theta$$

$$= 0$$

e

$$y_c = \frac{\iint_B y\delta(x,y)dxdy}{M(B)}$$

$$= \frac{3k\iint_B y\sqrt{x^2+y^2}dxdy}{7k\pi}$$

$$= \frac{3}{7\pi}\iint_B y\sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

$$= \frac{3}{7\pi}\iint_{B'} r\operatorname{sen}\theta r^2 dr\, d\theta$$

$$= \frac{3}{7\pi}\int_0^\pi \int_1^2 \operatorname{sen}\theta r^3 dr\, d\theta$$

$$= \frac{3}{7\pi}\int_0^\pi \operatorname{sen}\theta \left.\frac{r^4}{4}\right|_1^2 d\theta$$

$$= \frac{3}{7\pi}\frac{15}{4}\int_0^\pi \operatorname{sen}\theta d\theta$$

$$= \frac{3}{7\pi}\frac{15}{4}2$$

$$= \frac{45}{14\pi}$$

$\blacksquare$