

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof. Edson

1º Semestre

Gabarito Prova Final
Data: Sábado, 13 de Fevereiro

2010
Turma E3

Exercício 1

a). Considere a seguinte mudança de variável

$$\begin{cases} u = y - x^2 \\ v = x \end{cases}$$

teremos com isto

$$\begin{cases} x = v \\ y = u - v^2 \end{cases}$$

e o jacobiano desta mudança será

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2v \end{vmatrix} = 1$$

e além disso

$$\begin{aligned} x = 0 &\Rightarrow v = 0 \\ y = 1 + x^2 &\Rightarrow u = 1 \\ y = 1 + x^2 &\Rightarrow u = 2 \\ y = x + x^2 &\Rightarrow u = v \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \iint_B \frac{e^{y-x^2}}{y-x^2} dx dy &= \int_1^2 \int_0^u \frac{e^u}{u} dv du \\ &= \int_1^2 \frac{e^u}{u} v \Big|_0^u du \\ &= \int_1^2 e^u du \\ &= e^u \Big|_1^2 \\ &= e^2 - e \end{aligned}$$

□

b). Observe que

$$4x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow (2x)^2 + y^2 = 1$$

então, usando coordenadas polares, podemos representar a região

$$B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0 \}$$

da seguinte maneira

$$\begin{cases} 2x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

com

$$\begin{aligned} 0 &\leq r \leq 1 \\ 0 &\leq \theta \leq \pi \end{aligned}$$

e

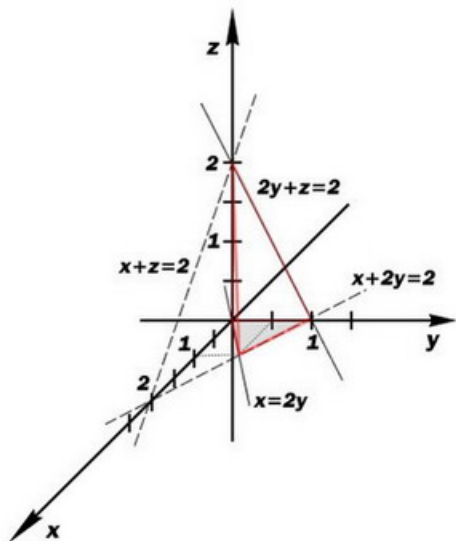
$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \cos \theta & -\frac{1}{2} r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = \frac{1}{2} r$$

Logo

$$\begin{aligned} \iint_B x^2 dx dy &= \int_0^1 \int_0^\pi \frac{1}{4} r^2 \cos^2 \theta \frac{1}{2} r d\theta dr \\ &= \frac{1}{8} \int_0^1 \int_0^\pi r^3 \cos^2 \theta d\theta dr \\ &= \frac{1}{8} \int_0^1 r^3 \left(\frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right) \Big|_0^\pi \\ &= \frac{\pi}{16} \int_0^1 r^3 dr \\ &= \frac{\pi}{16} \frac{r^4}{4} \Big|_0^1 \\ &= \frac{\pi}{64} \end{aligned}$$

■

Exercício 2 Esboçando a região dada obtemos o seguinte desenho:



Desta forma, o tetraedro em questão pode ser representado pelo conjunto

$$R = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq x \leq 1, \frac{x}{2} \leq y \leq \frac{2-x}{2}, 0 \leq z \leq 2-x-2y \right\}$$

e seu volume pode ser obtido da seguinte forma

$$\begin{aligned} V &= \iiint_R dx dy dz \\ &= \int_0^1 \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{2-x}{2}} \int_0^{2-x-2y} dz dy dx \\ &= \int_0^1 \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{2-x}{2}} (2-x-2y) dy dx \\ &= \int_0^1 (2y - xy - y^2) \Big|_{\frac{x}{2}}^{\frac{2-x}{2}} dx \\ &= \int_0^1 (1 - 2x + x^2) dx \\ &= x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Exercício 3 A massa do cone em questão pode ser obtida através da seguinte integral

$$M = \iiint_C \delta(x, y, z) dx dz dy$$

onde $\delta(x, y, z)$ é a densidade do cone C no ponto de coordenadas (x, y, z) .

Como a densidade no ponto (x, y, z) é proporcional ao quadrado da distância deste ponto ao eixo z , segue-se que

$$\delta(x, y, z) = k(x^2 + y^2), k \in \mathbb{R}$$

Assim, usando coordenadas cilíndricas, ou seja

$$\begin{cases} x = r \cos \theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ y = r \sin \theta & \text{onde } 0 \leq r \leq 1 \\ z = z & \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1 \end{cases}$$

e

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \right| = r$$

Desta forma, a massa do cone será

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 k(x^2 + y^2) r dz dr d\theta$$

Resolvendo esta integral, teremos

$$\begin{aligned} M &= k \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 (x^2 + y^2) r dz dr d\theta \\ &= k \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_r^1 r^3 dz dr d\theta \\ &= k \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 z \Big|_r^1 dr d\theta \\ &= k \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^3 - r^4) dr d\theta \\ &= k \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{4}r^4 - \frac{1}{5}r^5 \right]_0^1 d\theta \\ &= \frac{k}{20} \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{k\pi}{10} \end{aligned}$$

Exercício 4 Observe que

$$4x^2 + y^2 = 9 \Leftrightarrow \left(\frac{2x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$$

Então, a curva γ pode ser parametrizada da seguinte forma

$$\gamma : \begin{cases} \frac{2x}{3} = \cos \theta \\ \frac{y}{3} = \sin \theta \end{cases} \text{ com } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Desta forma, se considerarmos

$$A = \int_{\gamma} \frac{-y}{4x^2 + y^2} dx + \frac{x}{4x^2 + y^2} dy$$

teremos que

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \frac{-3\operatorname{sen} \theta}{9} - \frac{3\operatorname{sen} \theta}{2} d\theta + \frac{3\cos \theta}{2} \frac{3\cos \theta}{9} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \pi \end{aligned}$$

Exercício 5 Considere a seguinte superfície

$$\sigma : \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta \\ z = 5 \end{cases}$$

onde

$$K : \begin{cases} 0 \leq r \leq 4 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Observe que a fronteira da superfície σ é a circunferência

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ z = 5 \end{cases}$$

Assim, usando o Teorema de Stokes, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F \cdot d\Gamma &= \iint_{\sigma} \operatorname{rot} F \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \iint_K \operatorname{rot} F \cdot \left(\frac{\partial \sigma}{\partial r} \times \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \right) dr d\theta \end{aligned}$$

Onde

$$\frac{\partial \sigma}{\partial r} \times \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} = (0, 0, r)$$

e

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & 2xz & e^{xy} \end{vmatrix} \\ &= (xe^{xy} - 2x)\vec{i} - (ye^{xy} - y)\vec{j} + (2z - z)\vec{k} \\ &= (xe^{xy} - 2x, ye^{xy} - y, z) \end{aligned}$$

E, finalmente temos,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F \cdot d\Gamma &= \iint_K \operatorname{rot} F \cdot \left(\frac{\partial \sigma}{\partial r} \times \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \right) dr d\theta \\ &= \iint_K r z dr d\theta \\ &= \int_0^4 \int_0^{2\pi} 5r d\theta dr \\ &= 10\pi \int_0^4 r dr \\ &= 5\pi r^2 \Big|_0^4 \\ &= 80\pi \end{aligned}$$