

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof. Edson

1º Semestre

Gabarito 3ª Prova
Data: Quinta-feira, 11 de Fevereiro

2010
Turma E3

Exercício 1 Como a região delimitada pelas parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$ é fechada, limitada, possui fronteira γ contínua por partes e o campo vetorial para o qual desejamos calcular nossa integral de linha está definido nela, podemos, portanto, usar o Teorema de Green que nos permite afirmar que

$$\int_{\gamma} (y + e^{\sqrt{x}})dx + (2x + \cos y^2)dy =$$

$$\iint_K \left[\frac{\partial}{\partial x}(2x + \cos y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(y + e^{\sqrt{x}}) \right] dudv =$$

$$\iint_K dudv$$

onde

$$K : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq \sqrt{x} \end{cases}$$

Ou seja

$$\int_{\gamma} (y + e^{\sqrt{x}})dx + (2x + \cos y^2)dy =$$

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dydx =$$

$$\frac{1}{3}$$

■

Exercício 2 Chamemos de φ a região do plano $x + y + z = a$ que é limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = a^2$. Tal superfície pode ser parametrizada da seguinte forma:

$$\varphi : \begin{cases} x(u, v) = u \\ y(u, v) = v \\ z(u, v) = a - u - v \end{cases}, (u, v) \in K$$

onde

$$K = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq a^2\}$$

Com isto, segue-se que a área desta superfície será dada por

$$A = \iint_{\varphi} ds = \iint_K \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| dudv$$

Observe que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) = (1, 0, -1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = (0, 1, -1)$$

e

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} = (1, 1, 1)$$

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| = \sqrt{3}$$

Portanto,

$$A = \iint_K \sqrt{3} dudv$$

$$= \sqrt{3} \iint_K dudv$$

$$= \sqrt{3} \cdot \text{Área}(K)$$

$$= \sqrt{3}\pi a^2$$

■

Exercício 3 A área A da superfície

$$\varphi : \begin{cases} x(u, v) = u \cos v \\ y(u, v) = u \sin v \\ z(u, v) = u^2 \end{cases}, (u, v) \in K$$

com

$$K : \begin{cases} 0 \leq u \leq 4 \\ 0 \leq v \leq 2\pi \end{cases}$$

é dada pela seguinte integral de superfície

$$A = \iint_{\varphi} ds = \iint_K \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| dudv$$

Observe que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) = (\cos v, \sin v, 2u)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = (-u \sin v, u \cos v, 0)$$

e

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| = u\sqrt{4u^2 + 1}$$

Logo,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^4 \int_0^{2\pi} u\sqrt{4u^2 + 1} dv du \\ &= \int_0^4 2\pi u\sqrt{4u^2 + 1} du \\ &= \frac{\pi}{6} (65\sqrt{65} - 1) \end{aligned}$$

Então, segue-se que $n = 6$. ■

Exercício 4 Inicialmente precisamos determinar o plano que contém os pontos $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$. Para isto observe que os vetores

$$w_1 = (0, 1, 0) - (1, 0, 0) = (-1, 1, 0)$$

$$w_2 = (0, 0, 1) - (1, 0, 0) = (-1, 0, 1)$$

são paralelos ao plano que procuramos. Assim, o vetor normal deste plano com componente z não negativa é dado por

$$n = w_1 \times w_2 = (1, 1, 1)$$

Logo a equação do plano é dada por

$$[(x, y, z) - (0, 1, 0)] \cdot n = 0$$

ou seja

$$x + y + z = 1$$

Chamando de φ a região deste plano limitado pelo triângulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, temos que uma parametrização do mesmo é dada por

$$\varphi : \begin{cases} x(u, v) = u \\ y(u, v) = v \\ z(u, v) = 1 - u - v \end{cases}, (u, v) \in K$$

onde

$$K : \begin{cases} 0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1 - u \end{cases}$$

Portanto, o fluxo do campo vetorial $F(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ através de φ na direção do vetor n , é dado por

$$\begin{aligned} \iint_{\varphi} F \cdot n ds &= \iint_K F(\varphi(u, v)) \cdot (1, 1, 1) dudv \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-u} dv du \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Exercício 5 Observe que, sendo φ a região da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ tal que $\sqrt{2} \leq z \leq \sqrt{3}$ e $y \geq 0$, uma parametrização desta superfície é dada por

$$\varphi : \begin{cases} x(u, v) = 2 \operatorname{sen} u \cos v \\ y(u, v) = 2 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ z(u, v) = 2 \cos u \end{cases}, (u, v) \in K$$

onde

$$K : \begin{cases} \frac{\pi}{6} \leq u \leq \frac{\pi}{4} \\ 0 \leq v \leq \pi \end{cases}$$

Assim, podemos perceber que a fronteira do conjunto K define a curva

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$$

onde

$$\gamma_1 : \begin{cases} u = t \\ v = 0 \end{cases}, \frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{4}$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} u = \frac{\pi}{4} \\ v = t \end{cases}, 0 \leq t \leq \pi$$

$$-\gamma_3 : \begin{cases} u = t \\ v = \pi \end{cases}, \frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{4}$$

$$-\gamma_4 : \begin{cases} u = \frac{\pi}{6} \\ v = t \end{cases}, 0 \leq t \leq \pi$$

Logo, a fronteira da superfície φ será dada por

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

onde

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \varphi(\gamma_1) \\ &= \varphi(t, 0) \\ &= (2 \operatorname{sen} t, 0, 2 \cos t) \end{aligned}$$

com

$$\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{4}$$

do mesmo modo,

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= \varphi(\gamma_2) \\ &= \varphi\left(\frac{\pi}{4}, t\right) \\ &= (\sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \operatorname{sen} t, \sqrt{2}) \end{aligned}$$

com

$$0 \leq t \leq \pi$$

e

$$\begin{aligned} -\Gamma_3 &= \varphi(-\gamma_3) \\ &= \varphi(t, \pi) \\ &= (-2 \operatorname{sen} t, 0, 2 \cos t) \end{aligned}$$

com

$$\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{4}$$

e por fim,

$$\begin{aligned} -\Gamma_4 &= \varphi(-\gamma_4) \\ &= \varphi\left(\frac{\pi}{6}, t\right) \\ &= (\cos t, \sin t, \sqrt{3}) \end{aligned}$$

com

$$0 \leq t \leq \pi$$

Assim, como o conjunto K é fechado, limitado, com fronteira C^1 por partes e o campo vetorial

$$F(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$$

está definido em todo o conjunto K , podemos usar o **Teorema de Stokes** que nos permite afirmar que

$$\begin{aligned} \iint_{\varphi} \operatorname{rot} F \cdot \mathbf{n} ds &= \int_{\Gamma} F \cdot d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_1} F \cdot d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} F \cdot d\Gamma_2 + \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} F \cdot d\Gamma_3 + \int_{\Gamma_4} F \cdot d\Gamma_4 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} F \cdot d\Gamma_1 &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} F(2 \sin t, 0, 2 \cos t) \cdot \\ &\quad \cdot (2 \cos t, 0, -2 \sin t) dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (0, 2 \sin t, 4 \sin^2 t) \cdot \\ &\quad \cdot (2 \cos t, 0, -2 \sin t) dt \\ &= - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 8 \sin^3 t dt \\ &= \frac{10}{3} \sqrt{2} - 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2} F \cdot d\Gamma_2 &= \int_0^{\pi} F(\sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \sin t, \sqrt{2}) \cdot \\ &\quad \cdot (-\sqrt{2} \sin t, \sqrt{2} \cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{\pi} (-\sqrt{2} \sin t, \sqrt{2} \cos t, 2 \cos^2 t) \cdot \\ &\quad \cdot (-\sqrt{2} \sin t, \sqrt{2} \cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{\pi} 2 dt \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3} F \cdot d\Gamma_3 &= - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} F(-2 \sin t, 0, 2 \cos t) \cdot \\ &\quad \cdot (-2 \cos t, 0, -2 \sin t) dt \\ &= - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (0, -2 \sin t, 4 \sin^2 t) \cdot \\ &\quad \cdot (-2 \cos t, 0, -2 \sin t) dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 8 \sin^3 t dt \\ &= 3\sqrt{3} - \frac{10}{3} \sqrt{2} \end{aligned}$$

por fim,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_4} F \cdot d\Gamma_4 &= - \int_0^{\pi} F(\cos t, \sin t, \sqrt{3}) \cdot \\ &\quad \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt \\ &= - \int_0^{\pi} (-\sin t, \cos t, \cos^2 t) \cdot \\ &\quad \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt \\ &= - \int_0^{\pi} dt \\ &= -\pi \end{aligned}$$

E finalmente, segue-se que

$$\iint_{\varphi} \operatorname{rot} F \cdot \mathbf{n} ds = \pi$$

■

Exercício 6 (Outra Solução para o problema 5)

Observe que, sendo φ a região da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ tal que $\sqrt{2} \leq z \leq \sqrt{3}$ e $y \geq 0$, uma parametrização desta superfície é dada por

$$\varphi : \begin{cases} x(u, v) = 2 \sin u \cos v \\ y(u, v) = 2 \sin u \sin v \\ z(u, v) = 2 \cos u \end{cases}, (u, v) \in K$$

onde

$$K : \begin{cases} \frac{\pi}{6} \leq u \leq \frac{\pi}{4} \\ 0 \leq v \leq \pi \end{cases}$$

Assim, o vetor normal a esta superfície no ponto $\varphi(u, v)$ é dado por

$$\mathbf{n}_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

onde

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = (2 \cos u \cos v, 2 \cos u \sin v, -2 \sin u)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = (-2 \sin u \sin v, 2 \sin u \cos v, 0)$$

Logo,

$$\mathbf{n}_1 = (4 \cos v \sin^2 u, 4 \sin v \sin^2 u, 4 \cos u \sin u)$$

Agora, calculando o rotacional do campo

$$F(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$$

obtemos

$$\text{rot}F = (0, -2x, 2)$$

Com isto, segue-se que

$$\begin{aligned} \iint_{\varphi} \text{rot}F \cdot \mathbf{n} ds &= \iint_K \text{rot}F(\varphi(u, v)) \cdot \frac{\mathbf{n}_1}{\|\mathbf{n}_1\|} \|\mathbf{n}_1\| dudv \\ &= \iint_K \text{rot}F(\varphi(u, v)) \cdot \mathbf{n}_1 dudv \\ &= \iint_K (-16 \sin^3 u \cos v \sin v + \\ &\quad + 8 \cos u \sin u) dudv \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\pi} (-16 \sin^3 u \cos v \sin v + \\ &\quad + 8 \cos u \sin u) dv du \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 8\pi \sin u \cos u du \\ &= 4\pi \sin^2 u \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \pi \end{aligned}$$

■