**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral III**

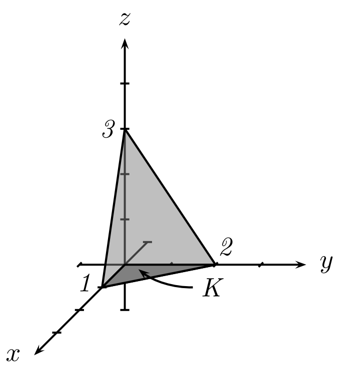
**Prof°. Edson**

**1° Semestre**

**Gabarito 2ª Prova** **2010**
**Data: Segunda-feira, 01 de Fevereiro** **Turma E3**

---

**Exercício 1** *Observe que o tetraedro sólido de vértices* $(0,0,0),(1,0,0),(0,2,0)$ *e* $(0,0,3)$ *possui o seguinte desenho*




*que passa pelos pontos* $(1,0,0),(0,2,0)$ *e* $(0,0,3)$. *Para isto, considere*

$$\vec{u} = (0,0,3) - (1,0,0) = (-1,0,3)$$

$$\vec{v} = (0,2,0) - (1,0,0) = (-1,2,0)$$

*Precisamos portanto, encontrar a equação do plano e lembre-se que o vetor normal ao plano que estamos procurando, é dado por*

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (-6,-3,-2)$$

*Logo, a equação procurada é*

$$-6x - 3y - 2z = d$$

*onde* $d \in \mathbb{R}$ *é um valor que ainda precisamos determinar. Como este plano deve passar pelo ponto* $(0,0,3)$ *segue-se que*

$$-6 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot 3 = d \Leftrightarrow d = -6$$

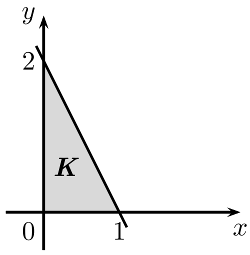
*e a equação do plano é*

$$6x + 3y + 2z = 6$$

*Com isto, temos que*

$$\iiint\limits_B xydxdydz = \iint\limits_K \left[\int_0^{\frac{6-6x-3y}{2}} xydz\right] dxdy$$

*onde*




$$K : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 2 - 2x \end{cases}$$

*Portanto,*

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_B xydxdydz &= \iint\limits_K \left[\int_0^{\frac{6-6x-3y}{2}} xydz\right] dxdy \\
&= \iint\limits_K xyz\Big|_0^{\frac{6-6x-3y}{2}} dxdy \\
&= \iint\limits_K xy\left(\tfrac{6-6x-3y}{2}\right)dxdy \\
&= \int_0^1\int_0^{2-2x} xy\left(\tfrac{6-6x-3y}{2}\right)dydx \\
&= \tfrac{1}{2}\int_0^1\int_0^{2-2x}(6xy - 6x^2y - 3xy^2)dydx \\
&= \tfrac{1}{2}\int_0^1 (3xy^2 - 3x^2y^2 - xy^3)\Big|_0^{2-2x} dx \\
&= \tfrac{1}{2}\int_0^1 4x\,(1-x)^3\,dx \\
&= \tfrac{1}{10}
\end{aligned}$$

■

**Exercício 2** *Queremos resolver a integral*

$$I = \iiint\limits_B \sqrt{x+y}\,\sqrt[3]{x+2y-z}\,dxdydz$$

*onde* $B$ *é a região* $1 \le x+y \le 2$, $0 \le x+2y-z \le 1$ *e* $0 \le z \le 1$. *Para isto façamos a seguinte mudança* *de variáveis*

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x + 2y - z \\ w = z \end{cases}$$

*e observe que*

$$\begin{cases} x = 2u - v - w \\ y = -u + v + w \\ z = w \end{cases}$$

*onde*

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = \left\|\begin{array}{rrr} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right\| = 1$$

*Com estas novas variáveis, o conjunto $B$ será transformado no conjunto*

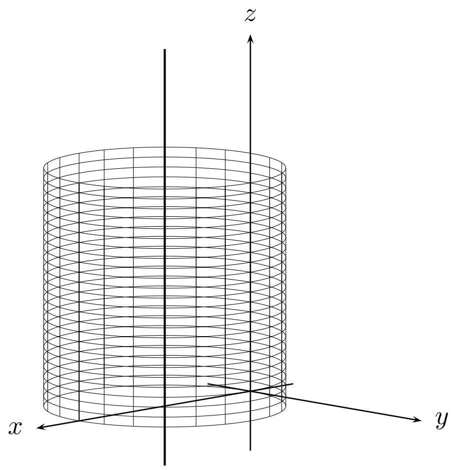
$$A : \begin{cases} 1 \le u \le 2 \\ 0 \le v \le 1 \\ 0 \le w \le 1 \end{cases}$$

*Assim, temos que*

$$\begin{aligned} I &= \iiint\limits_A \sqrt{u}\sqrt[3]{v}dudvdw \\ &= \int_0^1\int_0^1\int_1^2 \sqrt{u}\sqrt[3]{v}dudvdw \\ &= \int_0^1\int_0^1 \tfrac{2}{3}\sqrt{u^3}\sqrt[3]{v}\,\Big|_1^2 dvdw \\ &= \int_0^1\int_0^1 \tfrac{2}{3}(\sqrt{8}-1)\sqrt[3]{v}dvdw \\ &= \int_0^1 \tfrac{1}{2}(\sqrt{8}-1)\sqrt[3]{v^4}\,\Big|_0^1 dw \\ &= \int_0^1 \tfrac{1}{2}(\sqrt{8}-1)dw \\ &= \tfrac{1}{2}(\sqrt{8}-1) \end{aligned}$$

■

**Exercício 3** *O conjunto em questão, possui o seguinte desenho*




*A distância* $\mathbf{d}$ *de um ponto $(x,y,z)$ do cilindro a um ponto $(a,0,z)$ da reta $x = a, y = 0$, é dada por*

$$\mathbf{d} = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

*e, considerando o sólido dado tendo densidade homogênea*

$$\delta(x,y,z) = k,\ \ k \in \mathbb{R}$$

*o momento de inércia do mesmo em relação a reta dada é*

$$I = \iiint\limits_B \mathbf{d}^2 dxdydz$$

*Usando as coordenadas*

$$\begin{cases} x = a + r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$$

*com*

$$\begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le a \\ 0 \le z \le h \end{cases}$$

*e*

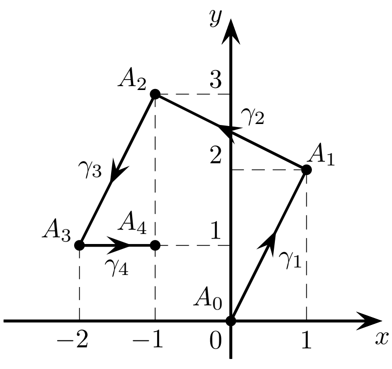
$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| = r$$

*teremos*

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^h \mathbf{d}^2 r dz dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^h r^2 r dz dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^a r^3 z \Big|_0^h dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^a h r^3 dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{hr^4}{4}\Big|_0^a d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{ha^4}{4} d\theta \\
&= \frac{ha^4}{4}\theta \Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{\pi h a^4}{2}
\end{aligned}$$

■

**Exercício 4** *A linha poligonal dada possui o seguinte esboço*




*Chamaremos de* $\gamma_i$ *a linha reta que une os pontos* $A_{i-1}$ *e* $A_i$ *com* $i = 1, 2, 3, 4$*. As parametrizaçãos destas retas são dadas por*

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}, 0 \le t \le 1$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + t \end{cases}, 0 \le t \le 1$$

$$\gamma_3 : \begin{cases} x = -1 - t \\ y = 3 - 2t \end{cases}, 0 \le t \le 1$$

$$\gamma_4 : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 \end{cases}, 0 \le t \le 1$$

*Portanto*

$$\begin{aligned}
\int_\gamma dx + dy &= \int_{\gamma_1}(dx + dy) + \int_{\gamma_2}(dx + dy) + \\
&\quad + \int_{\gamma_3}(dx + dy) + \int_{\gamma_4}(dx + dy) \\
&= \int_0^1 (dt + 2dt) + \int_0^1 (-2dt + dt) \\
&\quad + \int_0^1 (-dt - 2dt) + \int_0^1 dt \\
&= \int_0^1 (3dt - dt - 3dt + dt) \\
&= \int_0^1 0dt = 0
\end{aligned}$$

■

**Exercício 5** *O trabalho* $\tau$ *realizado pela força*

$$\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + (y + 2)\mathbf{j}$$

*ao mover um objeto ao longo do arco de ciclóide*

$$\mathbf{r}(t) = (t - \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j}, 0 \le t \le 2\pi$$

*é dado por*

$$\begin{aligned}
\tau &= \int_\mathbf{r} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\
&= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot (1 - \cos t, \operatorname{sen} t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t) \cdot (1 - \cos t, \operatorname{sen} t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} (t - \operatorname{sen} t, 3 - \cos t) \cdot (1 - \cos t, \operatorname{sen} t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} (t - t\cos t + 2\operatorname{sen} t) dt \\
&= (\tfrac{1}{2}t^2 - t\operatorname{sen} t - 3\cos t) \Big|_0^{2\pi} \\
&= 2\pi^2
\end{aligned}$$

■