

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof. Edson

1º Semestre

Gabarito 1ª Prova
Data: Terça-feira, 26 de Janeiro

2010
Turma E3

Exercício 1 Podemos calcular a área A da região B delimitada pela elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

através da seguinte integral dupla

$$A = \iint_B dx dy$$

Observe que

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

De modo que, usando a mudança de variáveis,

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}$$

cujo jacobiano é dado por

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right| = \begin{vmatrix} a \cos \theta & -a \sin \theta \\ b \sin \theta & b \cos \theta \end{vmatrix} = ab$$

O conjunto B será transformado no conjunto

$$C : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Donde segue-se que

$$\begin{aligned} A &= \iint_B dx dy \\ &= \iint_C ab r dr d\theta \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} ab r d\theta dr \\ &= \int_0^1 2\pi ab r dr \\ &= \pi ab \end{aligned}$$

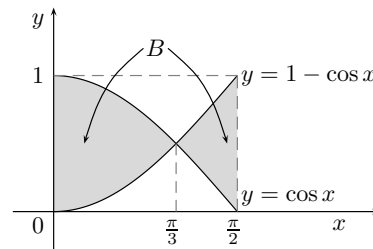
Exercício 2 Inicialmente desenhemos o conjunto B dado pela região que está entre as curvas

$$y = \cos x$$

e

$$y = 1 - \cos x$$

com $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$:



Assim, segue-se que

$$B = B_1 \cup B_2$$

onde

$$B_1 : \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \\ 1 - \cos x \leq y \leq \cos x \end{cases}$$

e

$$B_2 : \begin{cases} \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \cos x \leq y \leq 1 - \cos x \end{cases}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \iint_B x dx dy &= \iint_{B_1} x dx dy + \iint_{B_2} x dx dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_{1-\cos x}^{\cos x} x dy dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\cos x}^{1-\cos x} x dy dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} xy \Big|_{1-\cos x}^{\cos x} dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} xy \Big|_{\cos x}^{1-\cos x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} x(2\cos x - 1) dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} x(1 - 2\cos x) dx \end{aligned}$$

■

Resolvendo estas integrais, obtemos,

$$\iint_B x dx dy = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi - \pi + \frac{\pi^2}{72}$$

■

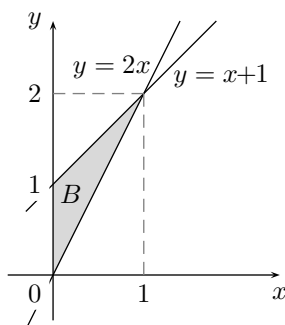
Exercício 3 Perceba que o domínio de integração na integral

$$\int_0^1 \int_{2x}^{x+1} f(x, y) dy dx$$

é o conjunto

$$B : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 2x \leq y \leq x+1 \end{cases}$$

cujo desenho é dado por



observe que este mesmo conjunto pode ser descrito como

$$B = B_1 \cup B_2$$

onde

$$B_1 : \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq x \leq \frac{y}{2} \end{cases}$$

e

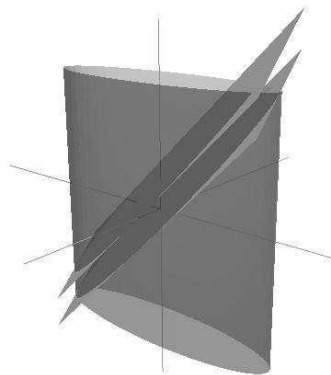
$$B_2 : \begin{cases} 1 \leq y \leq 2 \\ y-1 \leq x \leq \frac{y}{2} \end{cases}$$

Portanto,

$$\int_0^1 \int_{2x}^{x+1} f(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_0^{\frac{y}{2}} f(x, y) dx dy + \int_1^2 \int_{y-1}^{\frac{y}{2}} f(x, y) dx dy$$

■

Exercício 4 Esboçando as superfícies que delimitam o conjunto B obtemos o seguinte gráfico



Logo,

$$V(B) = \iint_C f(x, y) dx dy$$

onde C é o conjunto de todos os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$x^2 + 4y^2 \leq 4$$

e

$$f(x, y) = (x + y + 1) - (x + y) = 1$$

Ou seja,

$$V(B) = \iint_C f(x, y) dx dy = \text{Área de } C$$

Como C é uma elipse de eixos 4 e 1, segue-se do resultado obtido no problema 01 que

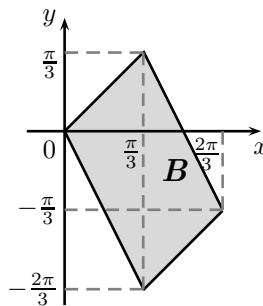
$$V(B) = \pi \cdot 4 \cdot 1 = 4\pi$$

■

Exercício 5 Desejamos calcular a integral dupla

$$\iint_B (2x + y) \cos(x - y) dx dy$$

onde B é o paralelogramo de vértices $(0, 0), (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}), (\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}), (\frac{\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3})$, cujo desenho é



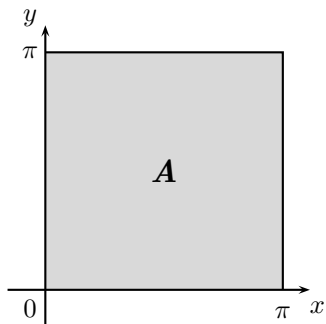
Efetuada a mudança de variáveis

$$\begin{cases} u = 2x + y \\ v = x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{u+v}{3} \\ v = \frac{u-2v}{3} \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \left\| \begin{array}{cc} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array} \right\| = \frac{1}{3}$$

O conjunto B será transformado no conjunto A cujo gráfico é



De modo que,

$$\begin{aligned} \iint_B (2x + y) \cos(x - y) dx dy &= \iint_A \frac{1}{3} u \cos v du dv \\ &= \frac{1}{3} \int_0^\pi \int_0^\pi u \cos v dv du \\ &= \frac{1}{3} \int_0^\pi u \text{sen } v \Big|_0^\pi du \\ &= 0 \end{aligned}$$

■