

Universidade Federal do Vale do São Francisco  
Engenharia Civil  
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof. Edson

1º Semestre

Gabarito 3ª Prova  
Data: Quinta-feira, 11 de Junho

2009  
Turma E3

**Exercício 1** Chamemos de  $\gamma$  a curva dada no problema. Fazendo um esboço de  $\gamma$  vamos descobrir que o interior desta curva é o conjunto

$$K = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \frac{x^3}{4} \right\}$$

Sabemos que o trabalho  $\tau$  realizado pelo campo de forças

$$\mathbf{F}(x, y) = \sqrt{y}\mathbf{i} + \sqrt{x}\mathbf{j}$$

para deslocar uma partícula, uma vez, ao longo da curva  $\gamma$  no sentido anti-horário, é dado por

$$\tau = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\gamma$$

e o **Teorema de Green** nos garante que

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\gamma = \iint_K \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

onde, estamos considerando

$$P(x, y) = \sqrt{y}$$

$$Q(x, y) = \sqrt{x}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \tau &= \iint_K \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \int_0^2 \int_0^{\frac{x^3}{4}} \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{y}} \right) dy dx \\ &= \int_0^2 \left( \frac{y}{2\sqrt{x}} - \sqrt{y} \right) \Big|_0^{\frac{x^3}{4}} dy dx \\ &= \int_0^2 \left( \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} \right) dx \\ &= \left( \frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} \right) \Big|_0^2 \\ &= -\frac{18}{35}\sqrt{2} \end{aligned}$$

**Exercício 2** Parametrizando a superfície dada no problema, obtemos

$$\varphi : \begin{cases} x(u, v) = u \\ y(u, v) = v \\ z(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2} \end{cases}$$

onde  $(u, v) \in K$ , com

$$K = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq u^2 + v^2 \leq 4 \right\}$$

Sabemos que a massa desta superfície é dada por

$$M = \iint_{\varphi} \delta dS$$

onde

$$\delta(x, y, z) = x^2 z$$

é a densidade da mesma. Para calcularmos esta massa, observemos antes que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) = \left( 1, 0, \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = \left( 0, 1, \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right)$$

donde segue-se que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = \left( -\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, -\frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, 1 \right)$$

e

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\| = \sqrt{2}$$

Agora, calculando a massa, teremos

$$\begin{aligned} M &= \iint_{\varphi} \delta dS \\ &= \iint_K \delta(\varphi(u, v)) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\| du dv \\ &= \iint_K \sqrt{2} \delta(u, v \sqrt{u^2 + v^2}) du dv \\ &= \sqrt{2} \iint_K u^2 \sqrt{u^2 + v^2} du dv \end{aligned}$$

■

Usando coordenadas polares, ou seja

$$\begin{cases} u = r \cos \theta \\ v = r \sin \theta \end{cases}$$

e, neste sistema de coordenadas, o conjunto  $K$  torna-se

$$K : \begin{cases} 0 \leq r \leq 4 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

e o jacobiano desta mudança de variáveis é dado por

$$\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(r, \theta)} \right| = r$$

Portanto,

$$\begin{aligned} M &= \sqrt{2} \iint_K u^2 \sqrt{u^2 + v^2} du dv \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_1^4 r^2 \cos^2 \theta r \cdot r \cdot dr d\theta \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_1^4 r^4 \cos^2 \theta dr d\theta \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left. \frac{r^5}{5} \cos^2 \theta \right|_1^4 d\theta \\ &= \sqrt{2} \cdot \frac{1023}{5} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{1023\sqrt{2}\pi}{5} \end{aligned}$$

■

**Exercício 3** Sabemos que o fluxo do campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = e^{-y} \mathbf{i} - y \mathbf{j} + x \operatorname{sen} z \mathbf{k}$$

através da superfície

$$\varphi : \begin{cases} x(u, v) = 2 \cos v \\ y(u, v) = \operatorname{sen} v \\ z(u, v) = u \end{cases}$$

onde  $(u, v) \in K$ , com

$$K : \begin{cases} 0 \leq u \leq 5 \\ 0 \leq v \leq 2\pi \end{cases}$$

na direção do vetor normal  $\mathbf{n}$ , é dado por

$$\iint_{\varphi} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

Para resolvermos esta integral de superfície, precisamos antes calcular:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) = (0, 0, 1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = (-2 \operatorname{sen} v, \cos v, 0)$$

donde segue-se que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = (-\cos v, -2 \operatorname{sen} v, 0)$$

Com isto, temos então, que

$$\begin{aligned} \iint_{\varphi} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS &= \iint_K \mathbf{F}(\varphi(u, v)) \cdot \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right) du dv \\ &= \iint_K \mathbf{F}(2 \cos v, \operatorname{sen} v, u) \cdot \\ &\quad (-\cos v, -2 \operatorname{sen} v, 0) du dv \\ &= \iint_K (e^{-\operatorname{sen} v}, -\operatorname{sen} v, 2 \cos v \operatorname{sen} u) \cdot \\ &\quad (-\cos v, -2 \operatorname{sen} v, 0) du dv \\ &= \iint_K (-\cos v e^{-\operatorname{sen} v} + 2 \operatorname{sen}^2 v) du dv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^5 (-\cos v e^{-\operatorname{sen} v} + 2 \operatorname{sen}^2 v) du dv \\ &= \int_0^{2\pi} (-\cos v e^{-\operatorname{sen} v} + 2 \operatorname{sen}^2 v) u \Big|_0^5 dv \\ &= 5 \int_0^{2\pi} (-\cos v e^{-\operatorname{sen} v} + 2 \operatorname{sen}^2 v) dv \\ &= 5 \left( e^{-\operatorname{sen} v} + v - \frac{\operatorname{sen} 2v}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= 10\pi \end{aligned}$$

■

**Exercício 4** Chamemos de  $\varphi$  a superfície do tetraedro em questão. Sabemos que o fluxo  $\psi$  do campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + y)\mathbf{i} + xy\mathbf{j} - (2xz + y)\mathbf{k}$$

através da superfície  $\varphi$  é dado por

$$\iint_{\varphi} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

onde  $\mathbf{n}$  é o vetor unitário normal à superfície  $\varphi$ . O

**Teorema da Divergência** nos diz que

$$\iint_{\varphi} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_B \operatorname{div} \mathbf{F} dx dy dz$$

onde  $B$  é interior da superfície  $\varphi$ , ou seja

$$B : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 - x \\ 0 \leq z \leq 1 - x - y \end{cases}$$

Portanto, segue-se que

$$\begin{aligned} \psi &= \iiint_B \operatorname{div} \mathbf{F} dx dy dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (2x + x - 2x) dz dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x dz dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} xz \Big|_0^{1-x-y} dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} x(1-x-y) dy dx \\ &= \int_0^1 x \left( y - xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{1-x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x) dx \\ &= \frac{1}{24} \end{aligned}$$

**Exercício 5** A superfície dada no problema possui a seguinte parametrização

$$\varphi : \begin{cases} x(u, v) = u \\ y(u, v) = v \\ z(u, v) = 1 - u - v \end{cases}$$

com  $(u, v) \in K$ , onde

$$K : \begin{cases} 0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1 - u \end{cases}$$

O **Teorema de Stokes** afirma que

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\Gamma = \iint_{\varphi} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

Observe porém que

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = (-y, -z, -x)$$

e, além disto temos que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) = (1, 0, -1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = (0, 1, -1)$$

donde segue-se que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = (1, 1, 1)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\Gamma &= \iint_{\varphi} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-u} \operatorname{rot} \mathbf{F}(\varphi(u, v)) \cdot (1, 1, 1) dv du \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-u} \operatorname{rot} \mathbf{F}(u, v, 1 - u - v) \cdot (1, 1, 1) dv du \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-u} (-v, u + v - 1, -u) \cdot (1, 1, 1) dv du \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-u} (-1) dv du \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$