

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

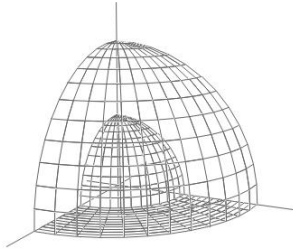
Prof. Edson

1º Semestre

Gabarito 2ª Prova
Data: Quinta-feira, 28 de Maio

2009
Turma E3

Exercício 1 Sendo B a região do espaço delimitada pelas esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ no primeiro octante, teremos o seguinte esboço da mesma



Usando coordenadas esféricas, ou seja, tomando

$$\begin{cases} x = r \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\ z = r \cos \varphi \end{cases}$$

o conjunto B torna-se

$$B : \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

e, o jacobiano desta mudança de variáveis é

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} \right| = r^2 \operatorname{sen} \varphi$$

Donde segue-se que

$$\begin{aligned} \iiint_B z dx dy dz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 r \cos \varphi r^2 \operatorname{sen} \varphi dr d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 r^3 \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi dr d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^4}{4} \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi \Big|_1^2 d\theta d\varphi \\ &= \frac{15}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi d\theta d\varphi \\ &= \frac{15}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \\ &= \frac{15\pi}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi d\varphi \end{aligned}$$

Tomando

$$u = \operatorname{sen} \varphi$$

e observando que

$$du = \cos \varphi d\varphi$$

$$\varphi = 0 \Rightarrow u = 0$$

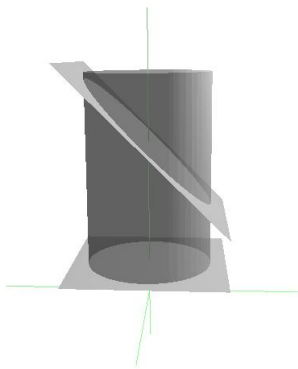
$$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 1$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} \iiint_B z dx dy dz &= \frac{15\pi}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi d\varphi \\ &= \frac{15\pi}{8} \int_0^1 u du \\ &= \frac{15\pi}{8} \frac{u^2}{2} \Big|_0^1 \\ &= \frac{15\pi}{16} \end{aligned}$$

■

Exercício 2 Fazendo um esboço do sólido em questão, obtemos



Assim, usando coordenadas cilíndricas,

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

cujos jacobiano é dado por

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \right| = r$$

o sólido torna-se

$$B : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 3 \\ 1 \leq z \leq 5 - r \sin \theta \end{cases}$$

Portanto, seu volume será

$$\begin{aligned} V &= \iiint_B dx dy dz \\ &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_1^{5-r \sin \theta} r dz d\theta dr \\ &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} r z \Big|_1^{5-r \sin \theta} d\theta dr \\ &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} r(4 - r \sin \theta) d\theta dr \\ &= \int_0^3 r(4\theta + r \cos \theta) \Big|_0^{2\pi} dr \\ &= \int_0^3 8\pi r dr \\ &= 8\pi \frac{r^2}{2} \Big|_0^3 \\ &= 36\pi \end{aligned}$$

■

Exercício 3 Considere

$$P(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$Q(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Observe que

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) &= \frac{-y \left(\frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right) 2x}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{-2xy}{2(\sqrt{x^2 + y^2})(x^2 + y^2)} \\ &= \frac{-xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) &= \frac{-x \left(\frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right) 2y}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{-2xy}{2 \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) (x^2 + y^2)} \\ &= \frac{-xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y), \forall (x, y) \neq (0, 0)$$

Assim, considerando

$$\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \},$$

como Ω é simplesmente conexo (não tem "buracos") e $(0, 0) \notin \Omega$, podemos afirmar que o campo vetorial

$$F(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$$

é conservativo em Ω . Portanto, o trabalho realizado por F para deslocar uma partícula do ponto $(-1, 2)$ ao ponto $(1, 2)$ é independente do caminho escolhido. Sendo assim, tomemos γ sendo o segmento de reta que une os pontos $(-1, 2)$ e $(1, 2)$, ou seja

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 2 \end{cases}, -1 \leq t \leq 1$$

Com isto, chamando de τ o trabalho que desejamos calcular, teremos que

$$\begin{aligned}\tau &= \int_{\gamma} F \cdot d\gamma \\ &= \int_{-1}^1 F(\gamma(t)) \cdot (1, 0) dt \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{t}{\sqrt{t^2 + 4}}, \frac{2}{\sqrt{t^2 + 4}} \right) \cdot (1, 0) dt \\ &= \int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{t^2 + 4}} dt\end{aligned}$$

Para resolver esta última integral, tome

$$u = t^2 + 4$$

e observe que

$$du = 2t dt$$

$$t = -1 \Rightarrow u = 5$$

$$t = 1 \Rightarrow u = 5$$

Assim,

$$\begin{aligned}\tau &= \int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{t^2 + 4}} dt \\ &= \int_5^5 \frac{du}{2\sqrt{u}} \\ &= 0\end{aligned}$$

Exercício 4 Sendo γ a metade direita do círculo

$$x^2 + y^2 = 16,$$

podemos parametrizar a curva γ da seguinte forma

$$\begin{cases} x(t) = 4 \cos t \\ y(t) = 4 \sin t \end{cases}, -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

De onde segue-se que

$$\begin{aligned}ds &= \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \\ &= \sqrt{16\cos^2 t + 16\sin^2 t} dt \\ &= 4 dt\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} xy^4 ds &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos t (4 \sin t)^4 4 dt \\ &= 4^6 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin^4 t dt\end{aligned}$$

Tome

$$u = \sin t$$

e observe que

$$du = \cos t dt$$

$$t = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow u = -1$$

$$t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 1$$

Então

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} xy^4 ds &= 4^6 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin^4 t dt \\ &= 4^6 \int_{-1}^1 u^4 du \\ &= \frac{4^6}{5} u^5 \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{2 \cdot 4^6}{5}\end{aligned}$$

Exercício 5 Considere o caminho

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$$

onde

$$\gamma_1 : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 1 \end{cases}, 0 \leq t \leq 1$$

e

$$\gamma_2 : \begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = t \end{cases}, 1 \leq t \leq 2$$

Perceba que a curva γ_1 é o segmento de reta saindo do ponto $(0, 1)$ para o ponto $(1, 1)$ e a curva γ_2 é o segmento de reta saindo do ponto $(1, 1)$ para o ponto $(1, 2)$. Portanto γ é um curva que se inicia no ponto $(0, 1)$ e termina no ponto $(1, 2)$. Em consequência disto teremos que

$$\int_{\gamma} (1 - ye^{-x})dx + e^{-x}dy = A + B$$

onde

$$A = \int_{\gamma_1} (1 - ye^{-x})dx + e^{-x}dy$$

e

$$B = \int_{\gamma_2} (1 - ye^{-x})dx + e^{-x}dy$$

Calculando A e B teremos

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (1 - e^{-t})dt \\ &= (t + e^{-t}) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{e} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} B &= \int_1^2 e^{-1}dt \\ &= e^{-1}t \Big|_1^2 \\ &= \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Logo

$$\int_{\gamma} (1 - ye^{-x})dx + e^{-x}dy = \frac{2}{e}$$