Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^{o}. Edson

1^{o} Semestre

Gabarito 1ª Prova **2009**
Data: Domingo, 05 de Abril **Turma E3**

Exercício 1 *Sendo*

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, 0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 1 \right\}$$

Usando o Teorema de Fubini, temos que

$$\iint_A \frac{1}{(x+y)^2} dxdy = \int_0^1 \int_0^2 \frac{1}{(x+y)^2} dxdy$$

Fazendo uma mudança de variáveis na integral interna, tome $u = x + y$ e observe que

$$du = dx$$

e,

$$x = 0 \Rightarrow u = y$$

$$x = 2 \Rightarrow u = y + 2$$

de modo que,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^2 \frac{1}{(x+y)^2} dxdy &= \int_0^1 \int_y^{y+2} \frac{1}{u^2} dudy \\
&= \int_0^1 -\frac{1}{u}\bigg|_y^{y+2} dy \\
&= \int_0^1 \frac{1}{y} dy - \int_0^1 \frac{1}{y+2} dy \\
&= \int_0^1 \frac{1}{y} dy - \ln|y+2|\big|_0^1 \\
&= \int_0^1 \frac{1}{y} dy + \ln\tfrac{2}{3}
\end{aligned}$$

Observe que a integral

$$\int_0^1 \frac{1}{y} dy$$

é uma integral imprópria, onde

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{y} dy &= \lim_{a \to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{y} dy \\
&= \lim_{a \to 0^+} \ln|y|\big|_a^1 \\
&= \lim_{a \to 0^+} \ln 1 - \ln a \\
&= \lim_{a \to 0^+} -\ln a \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}
\iint_A \frac{1}{(x+y)^2} dxdy &= \int_0^1 \int_0^2 \frac{1}{(x+y)^2} dxdy \\
&= \int_0^1 \frac{1}{y} dy + \ln\tfrac{2}{3} \\
&= +\infty + \ln\tfrac{2}{3} \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

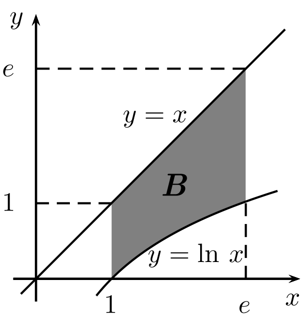
Exercício 2 *Dada a integral*

$$\int_1^e \int_{\ln x}^x f(x, y) dydx$$

temos que o domínio de integração é o conjunto

$$B : \begin{cases} 1 \leq x \leq e \\ \ln x \leq y \leq x \end{cases}$$

Cujo gráfico é



O conjunto B pode ser escrito como

$$B = B_1 \cup B_2$$

onde

$$B_1 : \begin{cases} 1 \leq x \leq e^y \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

e

$$B_2 : \begin{cases} y \leq x \leq e \\ 1 \leq y \leq e \end{cases}$$

De modo que

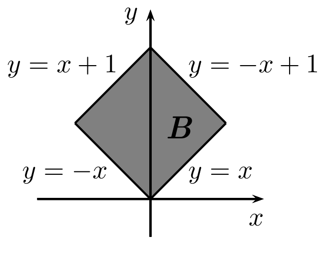
$$\begin{aligned} \int_1^e \int_{\ln x}^{x} f(x,y)dydx &= \iint_B f(x,y)dxdy \\ &= \iint_{B_1} f(x,y)dxdy + \\ &\quad + \iint_{B_2} f(x,y)dxdy \\ &= \int_0^1 \int_1^{e^y} f(x,y)dxdy + \\ &\quad + \int_1^e \int_y^e f(x,y)dxdy \end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Observe que*

$$\iint_B \sqrt[3]{y^2 - x^2}dxdy = \iint_B \sqrt[3]{(y-x)(y+x)}dxdy$$

e o conjunto B possui a seguinte representação gráfica



Fazendo a mudança de variáveis

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = -x + y \end{cases}$$

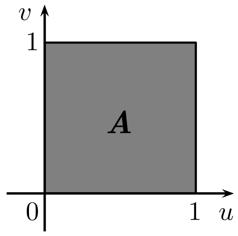
teremos

$$\begin{cases} x = \dfrac{u-v}{2} \\ u = \dfrac{u+v}{2} \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left|\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right| = \frac{1}{2}$$

e, neste novo sistema de variáveis o conjunto B será transformado no conjunto A que possui o seguinte gráfico



Ou seja

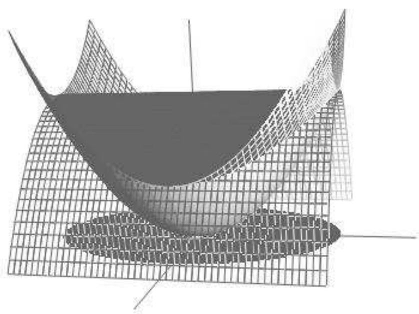
$$\begin{aligned} \iint_B \sqrt[3]{y^2 - x^2}dxdy &= \iint_A \frac{1}{2}\sqrt[3]{uv}dudv \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^1 \sqrt[3]{u}\sqrt[3]{v}dudv \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left.\frac{3}{4}\sqrt[3]{v}\sqrt[3]{u^4}\right|_0^1 dv \\ &= \frac{1}{2}\frac{3}{4}\int_0^1 \sqrt[3]{v}dv \\ &= \frac{9}{32} \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Pelo que foi enunciado no problema, o conjunto dado pode ser descrito como*

$$B = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \big|\, x^2 + y^2 \leq z \leq 1 - x^2 \}$$

Esboçando asdasdasdasdasda um gráfico teremos a seguinte figura



O volume do conjunto B é dado pela seguinte integral tripla

$$V = \iiint_B dxdydz = \iint_K \left[\int_{x^2+y^2}^{1-x^2} dz\right] dxdy$$

onde o conjunto K é o domínio de integração das variáveis x e y. Tal conjunto pode ser encontrado calculando-se a intersecção superfícies $z = x^2 + y^2$ e $z = 1 - x^2$. Calculando esta intersecção obtemos

$$K = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \big|\, 2x^2 + y^2 = 1\}$$

Usando coordenadas polares, o conjunto K pode ser reparametrizado da seguinte forma

$$K : \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} r\cos\,\theta \\ \\ y = r\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

onde

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq r \leq 1$$

e

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

Donde segue-se que

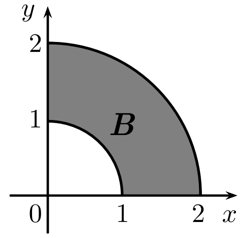
$$\begin{aligned} V &= \iint_K \left[\int_{x^2+y^2}^{1-x^2} dz \right] dxdy \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{\frac{r^2}{2}\cos^2\theta + r^2 sen^2\theta}^{1 - \frac{r^2}{2}\cos^2\theta} \frac{r}{\sqrt{2}} dz d\theta dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(1 - r^2\cos^2\theta - r^2\text{sen}^2\theta\right) \frac{r}{\sqrt{2}} d\theta dr \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(r - r^3\right) d\theta dr \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \left(r - r^3\right) \theta\Big|_0^{2\pi} dr \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \int_0^1 \left(r - r^3\right) dr \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \left(\tfrac{1}{2}r^2 - \tfrac{1}{4}r^4\right)\Big|_0^1 \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Pelo exposto no problema, temos que*

$$B = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \big|\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$$

cujo gráfico é



Também é dado que a densidade do conjunto B no ponto (x, y) é

$$\delta(x, y) = xy$$

Assim, a massa do conjunto B será:

$$\begin{aligned} M &= \iint_B \delta(x, y) dxdy \\ &= \iint_B xydxdy \end{aligned}$$

Usando coordenadas polares, o conjunto B pode ser reparametrizado da seguinte forma

$$B : \begin{cases} x = r\cos\,\theta \\ \\ y = r\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

com

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$1 \leq r \leq 2$$

e

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = r$$

Ou seja

$$\begin{aligned} M &= \iint_B xydxdy \\ &= \int_1^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\text{sen}\,\theta\cos\,\theta r d\theta dr \\ &= \int_1^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3\text{sen}\,\theta\cos\,\theta d\theta dr \\ &= \int_1^2 \frac{1}{2} r^3\text{sen}^2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dr \\ &= \int_1^2 \frac{1}{2} r^3 dr \\ &= \frac{1}{8} r^4 \Big|_1^2 \\ &= \frac{15}{8} \end{aligned}$$

Do mesmo modo, calculando o centro de massa (x_c, y_c) *teremos*

$$\begin{aligned}
x_c &= \frac{1}{M}\iint_B x\delta(x,y)dxdy \\
&= \frac{8}{15}\iint_B x^2 y dxdy \\
&= \frac{8}{15}\int_1^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\text{sen}^2\theta r\cos\,\theta r d\theta dr \\
&= \frac{8}{15}\int_1^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^4\text{sen}^2\theta\cos\,\theta d\theta dr \\
&= \frac{8}{15}\int_1^2 \frac{1}{3}r^4\text{sen}^3\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dr \\
&= \int_1^2 \frac{1}{3}r^4 dr \\
&= \frac{8}{15}\;\frac{1}{15}r^5\Big|_1^2 \\
&= \frac{248}{225}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
y_c &= \frac{1}{M}\iint_B y\delta(x,y)dxdy \\
&= \frac{8}{15}\iint_B xy^2 dxdy \\
&= \frac{8}{15}\int_1^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\text{sen}\,\theta r^2\cos^2\theta r d\theta dr \\
&= \frac{8}{15}\int_1^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^4\text{sen}\,\theta\cos^2\theta d\theta dr \\
&= \frac{8}{15}\int_1^2 \frac{-1}{3}r^4\cos^3\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dr \\
&= \frac{8}{15}\int_1^2 \frac{1}{3}r^4 dr \\
&= \frac{8}{15}\;\frac{1}{15}r^5\Big|_1^2 \\
&= \frac{248}{225}
\end{aligned}$$

Então, o centro de massa do conjunto B é o ponto $\left(\frac{248}{225}, \frac{248}{225}\right)$ ■