Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^{o}. Edson

1^{o} Semestre

Gabarito Prova Final **2008**
Data: Julho **Turma 31**

Exercício 1 *Inicialmente, calculemos a intersecção entre o cone e a esfera. Isto nos dará uma idéia do que será o nosso domínio de integração:*

$$\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, obtemos como solução o conjunto

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}, (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Assim, o volume V do sólido dado será

$$V = \iint_K \left(\sqrt{1 - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2} \right) dxdy$$

onde

$$K = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2} \right\}$$

Usando coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r\cos\,\theta \\ y = r\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

o conjunto K pode ser reescrito da seguinte forma

$$K : \begin{cases} 0 \leq r \leq \sqrt{\frac{1}{2}} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Então

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{1 - r^2} - r \right) r d\theta \; dr \\ &= \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \left(\sqrt{1 - r^2} - r \right) r\theta \Big|_0^{2\pi} dr \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \left(\sqrt{1 - r^2} - r \right) rdr \\ &= -\tfrac{2\pi}{3} \left(\sqrt{(1 - r^2)^3} + r^3 \right) \Big|_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \\ &= -\tfrac{2\pi}{3} \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2} - 1 \right) \\ &= -\tfrac{\pi}{3} \left(\sqrt{2} - 2 \right) \\ &= \tfrac{\pi}{3} \left(2 - \sqrt{2} \right) \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Pelo enunciado do problema temos que o conjunto B é dado por*

$$B = \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 \\ x \geq 0, y \geq 0, y \geq 0 \\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

Usando coordenadas esféricas

$$\begin{cases} x = \rho \text{ sen } \theta \text{ sen } \varphi \\ y = \rho \cos\,\theta \text{ sen } \varphi \\ z = \rho \cos\,\varphi \end{cases}$$

O conjunto B pode ser reescrito da seguinte maneira

$$B = \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 3 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Considerando

$$A = \iiint_B e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dxdydz$$

De modo que,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^\rho \rho^2 \text{sen } \varphi \; d\varphi \; d\theta \; d\rho \\ &= -\int_0^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^\rho \rho^2 \cos \; \varphi\big|_0^{\frac{\pi}{2}} \; d\theta \; d\rho \\ &= \int_0^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^\rho \rho^2 d\theta \; d\rho \\ &= \int_0^3 e^\rho \rho^2 \theta\big|_0^{\frac{\pi}{2}} \; d\rho \\ &= \tfrac{\pi}{2} \int_0^3 e^\rho \rho^2 d\rho \\ &= \tfrac{\pi}{2} e^\rho \left(\rho^2 - 2\rho + 2\right)\big|_0^3 \\ &= \tfrac{\pi}{2}(5e^3 - 2) \end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Sendo* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *e* $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$*, temos que*

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$$

$$\nabla g = (g_x, g_y, g_z)$$

onde, estamos supondo que f *e* g *são funções das variáveis* x, y *e* z*. Donde segue-se que*

$$\begin{aligned} \nabla f \times \nabla g &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \end{vmatrix} \\ &= (f_y g_z - f_z g_y, f_z g_x - f_x g_z, f_x g_y - f_y g_x) \end{aligned}$$

Portanto

$$\text{div}(\nabla f \times \nabla g) = p_x + q_y + m_z$$

onde

$$p = f_y g_z - f_z g_y$$

$$q = f_z g_x - f_x g_z$$

$$m = f_x g_y - f_y g_x$$

Observe que

$$p_x = f_{xy} g_z + f_y g_{xz} - f_{xz} g_y - f_z g_{xy}$$

$$q_y = f_{yz} g_x + f_z g_{xy} - f_{xy} g_z - f_x g_{yz}$$

$$m_z = f_{xz} g_y + f_x g_{yz} - f_{yz} g_x - f_y g_{xz}$$

Logo

$$\text{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$$

■

Exercício 4 *A porção de superfíce descrita no problema pode ser representada da seguinte forma*

$$B = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \; x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \; com \; (x, y) \in K \right\}$$

onde

$$K = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \; x^2 + y^2 \leq ax \right\}$$

Dada a simetria da esfera, o conjunto B *é composto por duas partes iguais, de modo que a área que desejamos calcular será o dobro da área de uma delas. A parte superior da região* B *pode ser parametrizada da seguinte maneira:*

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{a^2 - u^2 - v^2} \end{cases} \quad , (u, v) \in K$$

Portanto,

$$\begin{aligned} A_B &= 2 \iint_\sigma dS \\ &= 2 \iint_K \left\| \tfrac{\partial \sigma}{\partial u} \times \tfrac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| dudv \end{aligned}$$

onde

$$\tfrac{\partial \sigma}{\partial u} = \left(1, 0, \frac{-u}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}}\right)$$

$$\tfrac{\partial \sigma}{\partial v} = \left(1, 0, \frac{-v}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}}\right)$$

e

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial \sigma}{\partial u} \times \tfrac{\partial \sigma}{\partial v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{-u}{\sqrt{a^2-u^2-v^2}} \\ 0 & 1 & \frac{-v}{\sqrt{a^2-u^2-v^2}} \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{u}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}}, \frac{v}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}}, 1 \right) \end{aligned}$$

com

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| = \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - u^2 - v^2}}$$

Então

$$A_B = 2 \iint_K \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - u^2 - v^2}} dudv$$

Usando coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r\cos\,\theta \\ \\ y = r\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

o conjunto K pode ser reescrito da seguinte forma

$$K : \begin{cases} 0 \leq r \leq a\cos\,\theta \\ \\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

De modo que

$$A_B = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\cos\,\theta}\sqrt{\frac{a^2}{a^2-r^2}}rdrd\theta$$

Para resolvermos esta integral faremos uma mudança de variável. Tome

$$w = a^2 - r^2$$

e observe que

$$dw = -2rdr$$

e

$$r = 0 \Rightarrow w = a^2$$

$$r = a\cos\,\theta \Rightarrow w = a^2(1-\cos^2\theta)$$

Assim,

$$\begin{aligned} A_B &= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{a^2}^{a^2(1-\cos^2\theta)}\sqrt{\tfrac{a^2}{w}}dwd\theta \\ &= -a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{a^2}^{a^2(1-\cos^2\theta)}\tfrac{1}{\sqrt{w}}dwd\theta \\ &= -2a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{w}\Big|_{a^2}^{a^2(1-\cos^2\theta)}d\theta \\ &= -2a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{1-\cos^2\theta}-1\right)d\theta \\ &= -2a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(|\text{sen}\,\theta|-1\right)d\theta \\ &= -2a^2\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\text{sen}\,\theta|\,d\theta - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\right) \\ &= -2a^2\left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\text{sen}\,\theta\;d\theta - \pi\right) \\ &= -2a^2\left(-2\,\cos\,\theta|_0^{\frac{\pi}{2}} - \pi\right) \\ &= 2a^2\,(\pi-2) \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Considere a seguinte superfície*

$$\sigma : \begin{cases} x = r\cos\,\theta \\ \\ y = r\text{sen}\,\theta \\ \\ z = 5 \end{cases}$$

onde

$$K : \begin{cases} 0 \leq r \leq 4 \\ \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Observe que a fronteira da superfície σ é a circunferência

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ \\ z = 5 \end{cases}$$

Assim, usando o Teorema de Stokes, temos que

$$\begin{aligned} \int_\Gamma F\cdot d\Gamma &= \iint_\sigma \text{rot}\;F\cdot\mathbf{n}dS \\ &= \iint_K \text{rot}\;F\cdot\left(\tfrac{\partial\sigma}{\partial r}\times\tfrac{\partial\sigma}{\partial\theta}\right)drd\theta \end{aligned}$$

Onde

$$\frac{\partial\sigma}{\partial r}\times\frac{\partial\sigma}{\partial\theta} = (0,0,r)$$

e

$$\begin{aligned} \text{rot}\;F &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & 2xz & e^{xy} \end{vmatrix} \\ &= (xe^{xy}-2x)\vec{i} - (ye^{xy}-y)\vec{j} + (2z-z)\vec{k} \\ &= (xe^{xy}-2x, ye^{xy}-y, z) \end{aligned}$$

E, finalmente temos,

$$\begin{aligned} \int_\Gamma F\cdot d\Gamma &= \iint_K \text{rot}\;F\cdot\left(\tfrac{\partial\sigma}{\partial r}\times\tfrac{\partial\sigma}{\partial\theta}\right)drd\theta \\ &= \iint_K r\mathbf{z}drd\theta \\ &= \int_0^4\int_0^{2\pi}5rd\theta dr \\ &= 10\pi\int_0^4 rdr \\ & 5\pi r^2\big|_0^4 \\ &= 80\pi \end{aligned}$$

■