Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof$^{\text{o}}$. Edson

1$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito 3$^{\text{a}}$ Prova **2008**
Data: 13 de Novembro de 2012 **Turma 31**

Exercício 1 *Uma parametrização possível para a superfície em questão, pode ser dada da seguinte forma:*

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + 2v^2 \end{cases}, \text{ onde } 4u^2 + 16v^2 \leq 1$$

Segue-se disto, que

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) = (1, 0, 2u)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v) = (0, 1, 4v)$$

e

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v) = (-2u, -4v, 1)$$

$$\left\| \frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v) \right\| = \sqrt{4u^2 + 16v^2 + 1}$$

Porntanto, a área da superfície em questão, é

$$\begin{aligned} A &= \iint_\sigma ds \\ &= \iint_\Omega \left\| \frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v) \right\| du\, dv \\ &= \iint_\Omega \sqrt{4u^2 + 16v^2 + 1} du\, dv \end{aligned}$$

onde

$$\Omega = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \middle| 4u^2 + 16v^2 \leq 1 \right\}$$

Recorrendo a uma mudança de variáveis, considere

$$\begin{cases} 2u = r\cos\theta \\ 4v = r\sin\theta \end{cases}$$

onde

$$|J| = \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(r,\theta)} \right| = \frac{1}{8} r$$

e, sob esta mudança, o conjunto Ω, é transformado no conjunto

$$\Omega' : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} A &= \iint_\Omega \sqrt{4u^2 + 16v^2 + 1} du\, dv \\ &= \iint_{\Omega'} \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta + 1} \frac{1}{8} r d\theta\, dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta + 1} \frac{1}{8} r d\theta\, dr \\ &= \frac{\pi}{12} \left(2\sqrt{2} - 1 \right) \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Exercício 2 *De modo análogo ao que foi no problema anterior, uma parametrização para a superfície σ é dada por*

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{u^2 + v^2} \end{cases}, \text{ com } 1 \leq u^2 + v^2 \leq 9$$

e, portanto, segue-se que

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) = \left(1, 0, \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v) = \left(0, 1, \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right)$$

e

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v) = \left(\frac{-u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \frac{-v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, 1 \right)$$

$$\left\| \frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v) \right\| = \sqrt{2}$$

Logo,

$$\iint_\sigma f(x,y,z)ds = \iint_\sigma x ds$$

$$= \iint_\Omega u \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) \right\| du\, dv$$

$$= \sqrt{2} \iint_\Omega u\, du\, dv$$

onde

$$\Omega = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, 1 \leq u^2 + v^2 \leq 9 \right\}$$

Usando coordenadas polares, ou seja

$$\begin{cases} u = r\cos\theta \\ v = r\sin\theta \end{cases}$$

onde

$$|J| = \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(r,\theta)} \right| = r$$

o conjunto Ω, *é transformado no conjunto*

$$\Omega' : \begin{cases} 1 \leq r \leq 3 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

e disto, segue-se que

$$\iint_\sigma f(x,y,z)ds = \sqrt{2} \iint_\Omega u\, du\, dv$$

$$= \sqrt{2} \iint_{\Omega'} r\cos\theta\, r d\theta\, dr$$

$$= \sqrt{2} \int_1^3 \int_0^{2\pi} r^2 \cos\theta\, d\theta\, dr$$

$$= 0$$

■

Exercício 3 *Uma parametrização para a superfície em questão é dada por*

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{u^2+v^2} \end{cases}, \text{ com } 1 \leq u^2 + v^2 \leq 4$$

Assim, segue-se que

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) \right\| = \sqrt{2}$$

e, sendo constante a densidade desta superfície, segue-se que sua massa é,

$$M = \iint_\sigma \delta ds$$

$$= \iint_\sigma k ds$$

$$= k \iint_\sigma ds$$

$$= k \iint_\Omega \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) \right\| du\, dv$$

$$= k\sqrt{2} \iint_\Omega du\, dv$$

$$= k\sqrt{2} \cdot \acute{A}rea(\Omega)$$

onde

$$\Omega = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, 1 \leq u^2 + v^2 \leq 4 \right\}$$

Ou seja,

$$M = 3k\pi\sqrt{2}$$

Agora, continuando com o centro de massa, temos

$$x_c = \frac{\iint_\sigma x\delta ds}{M}$$

$$= \frac{k \iint_\sigma x ds}{M}$$

$$= 0$$

$$y_c = \frac{\iint_\sigma y\delta ds}{M}$$

$$= \frac{k \iint_\sigma y ds}{M}$$

$$= 0$$

$$z_c = \frac{\displaystyle\iint_\sigma z\delta ds}{M}$$

$$= \frac{k}{M}\iint_\sigma z ds$$

$$= \frac{k}{3k\pi\sqrt{2}}\iint_\Omega \sqrt{u^2+v^2}\left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right\| du\,dv$$

$$= \frac{k\sqrt{2}}{3k\pi\sqrt{2}}\iint_\Omega \sqrt{u^2+v^2}du\,dv$$

$$= \frac{1}{3\pi}\iint_\Omega \sqrt{u^2+v^2}du\,dv$$

$$= \frac{1}{3\pi}\int_1^2\int_0^{2\pi} r^2 d\theta\,dr$$

$$= \frac{14}{9}$$

Portanto, o centro de massa da superfície dada é

$$C = \left(0, 0, \frac{14}{9}\right)$$

$\blacksquare$

Exercício 4 *A integral dada no problema corresponde, na verdade, ao cálculo do fluxo do campo vetorial $\vec{u}$ através da superfície σ na direção de $\vec{n}$. Usando o **teorema da divergência de Gauss**, segue-se que*

$$\iint_\sigma \vec{u}\cdot\vec{n}\,ds = \iiint_B \operatorname{div}\vec{u}\,dx\,dy\,dz$$

$$= \iiint_B (2+2z)dx\,dy\,dz$$

Usando coordenadas esféricas, ou seja

$$\begin{cases} x = \rho\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta \\ y = \rho\operatorname{sen}\varphi\cos\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

onde

$$|J| = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)}\right| = \rho^2\operatorname{sen}\varphi,$$

*o conjunto **B** é transformado no conjunto*

$$B' : \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le \rho \le 1 \end{cases}$$

e, segue-se disto que

$$\iint_\sigma \vec{u}\cdot\vec{n}\,ds = \iiint_B (2+2z)dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi}(2+2\rho\cos\varphi)\rho^2\operatorname{sen}\varphi\,d\theta\,d\varphi\,d\rho$$

$$= \frac{8}{3}\pi$$

$\blacksquare$

Exercício 5 *Observe que a fronteira da superfície dada corresponde à interseção da superfície*

$$x^2 + \frac{1}{4}y^2 + z^2 = 2$$

com o plano

$$z = 1$$

ou seja

$$x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$$

que pode ser parametrizada da seguinte maneira

$$\Gamma : \begin{cases} x = \cos t \\ y = 2\operatorname{sen} t \quad , 0 \le t \le 2\pi \\ z = 1 \end{cases}$$

*Assim, usando o **teorema de Stokes**, teremos que*

$$\iint_\sigma (\operatorname{rot}\mathbf{F})\cdot\vec{n}\,ds = \int_\Gamma \mathbf{F}\cdot\,dr$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathbf{F}(\Gamma(t))\cdot\Gamma'(t)dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathbf{F}(\cos t, 2\operatorname{sen} t, 1)\cdot(-\operatorname{sen} t, 2\cos t, 0)dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(4\operatorname{sen}^3 t + 2\cos^3 t\right)dt$$

$$= 0$$

$\blacksquare$