

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

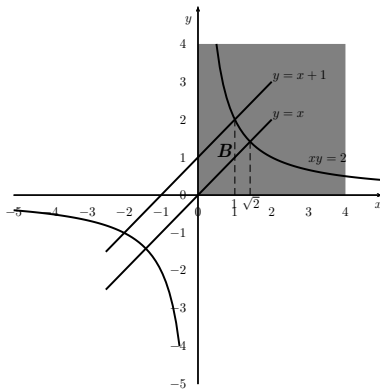
Prof. Edson

1º Semestre

Gabarito 1ª Prova
Data: Março

2008
Turma 31

Exercício 1 Esboçando um gráfico do conjunto B obtemos



Donde segue-se que

$$B = B_1 \cup B_2$$

onde

$$B_1 : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x \leq y \leq x + 1 \end{cases}$$

e

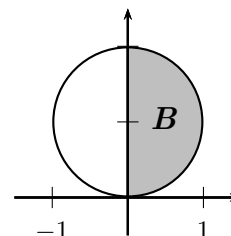
$$B_2 : \begin{cases} 1 \leq x \leq \sqrt{2} \\ x \leq y \leq \frac{2}{x} \end{cases}$$

Logo

$$\begin{aligned} \text{Área}(B) &= \iint_B dx dy \\ &= \iint_{B_1} dx dy + \iint_{B_2} dx dy \\ &= \int_0^1 \int_x^{x+1} dy dx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_x^{\frac{2}{x}} dy dx \\ &= \int_0^1 y|_x^{x+1} dx + \int_1^{\sqrt{2}} y|_x^{\frac{2}{x}} dx \\ &= \int_0^1 dx + \int_1^{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{x} - x\right) dx \\ &= x|_0^1 + \left(2 \ln|x| - \frac{1}{2}x^2\right)|_1^{\sqrt{2}} \\ &= 1 + 2 \ln \sqrt{2} - 1 + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \ln 2 \end{aligned}$$

■

Exercício 2 Observe que o domínio de integração é o conjunto B , conforme está esboçado na figura abaixo



Assim, considerando

$$A = \int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} xy dy dx$$

teremos que

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^1 \frac{1}{2}xy^2 \Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{2}x \left[(1 + \sqrt{1-x^2})^2 - (1 - \sqrt{1-x^2})^2 \right] dx \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{2}x \left[(2 + 2\sqrt{1-x^2} - x^2) - (2 - 2\sqrt{1-x^2} - x^2) \right] dx \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{2}x \left[2 + 2\sqrt{1-x^2} - x^2 - 2 + 2\sqrt{1-x^2} + x^2 \right] dx \\
 &= \int_0^1 2x\sqrt{1-x^2} dx
 \end{aligned}$$

Considere

$$z = 1 - x^2$$

e observe que

$$dz = -2x dx$$

e

$$x = 0 \Rightarrow z = 1$$

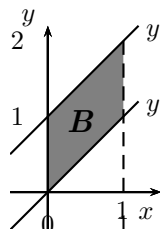
$$x = 1 \Rightarrow z = 0$$

Assim, segue-se que

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} xy dy dx &= \int_0^1 2x\sqrt{1-x^2} dx \\
 &= - \int_1^0 \sqrt{z} dz \\
 &= \int_0^1 \sqrt{z} dz \\
 &= \frac{2}{3} \sqrt{z^3} \Big|_0^1 \\
 &= \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

■

Exercício 3 O conjunto B tem a seguinte representação gráfica



Pelo exposto no problema, temos que a densidade no ponto (x, y) é dada por

$$\delta(x, y) = xy$$

Assim, a massa do conjunto B , é dada por

$$\begin{aligned}
 \iint_B \delta(x, y) dx dy &= \int_0^1 \int_x^{x+1} xy dy dx \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{2}xy^2 \Big|_x^{x+1} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{2}x \left[(x+1)^2 - x^2 \right] dx \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{2}x(2x+1) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 (2x^2 + x) dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) \\
 &= \frac{7}{12}
 \end{aligned}$$

Além disso, se chamarmos de (x_c, y_c) o centro de massa do conjunto B , teremos então

$$\begin{aligned}
 x_c &= \frac{\iint_B x\delta(x, y) dx dy}{\iint_B \delta(x, y) dx dy} \\
 &= \frac{12}{7} \iint_B x^2 y dx dy \\
 &= \frac{12}{7} \int_0^1 \int_x^{x+1} x^2 y dy dx \\
 &= \frac{6}{7} \int_0^1 x^2 y^2 \Big|_x^{x+1} dx \\
 &= \frac{6}{7} \int_0^1 (2x^3 + x^2) dx \\
 &= \frac{5}{7}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 y_c &= \frac{\iint_B y \delta(x,y) dx dy}{\iint_B \delta(x,y) dx dy} \\
 &= \frac{12}{7} \iint_B xy^2 dx dy \\
 &= \frac{12}{7} \int_0^1 \int_x^{x+1} xy^2 dy dx \\
 &= \frac{4}{7} \int_0^1 xy^3 \Big|_x^{x+1} dx \\
 &= \frac{4}{7} \int_0^1 x[(x+1)^3 - x^3] dx \\
 &= \frac{4}{7} \int_0^1 (3x^3 + 3x^2 + x) dx \\
 &= \frac{9}{7}
 \end{aligned}$$

Exercício 4a). Tome $u = \sqrt{x}$ e observe que

$$du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \Leftrightarrow 2udu = dx$$

Assim

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} &= \int \frac{2udu}{u(1+u^2)} \\
 &= 2 \int \frac{du}{(1+u^2)} \\
 &= 2 \arctg u + k \\
 &= 2 \arctg \sqrt{x} + k
 \end{aligned}$$

onde $k \in \mathbb{R}$.

b). Usando integração por partes, considere

$$\begin{cases} u = \arcsen x \\ dv = dx \end{cases}$$

e observe que

$$\begin{cases} du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ v = x \end{cases}$$

Assim, temos que

$$\int \arcsen x dx = x \arcsen x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Usando agora integração por substituição, considere $z = 1 - x^2$ e observe que $dz = -2x dx$. Assim temos que

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x}{1-x^2} dx &= - \int \frac{dz}{2\sqrt{z}} \\
 &= -\sqrt{z} + k \\
 &= -\sqrt{1-x^2} + k, k \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

E, finalmente temos,

$$\begin{aligned}
 \int \arcsen x dx &= x \arcsen x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
 &= x \arcsen x + \sqrt{1-x^2} + k
 \end{aligned}$$

onde $k \in \mathbb{R}$.**Exercício 5** Calculando a intersecção entre as curvas dadas teremos

$$\begin{cases} y^2 = x & x = 1 \text{ e } y = -1 \\ y = x - 2 & \Leftrightarrow \text{ou} \\ & x = 4 \text{ e } y = 2 \end{cases}$$

Usando integração em relação a variável y temos a área da região procurada dada por

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^2 (y+2-y^2) dy &= \frac{1}{2}y^2 + 2y - \frac{1}{3}y^3 \Big|_{-1}^2 \\
 &= \frac{10}{3} - \left(-\frac{7}{6}\right) \\
 &= \frac{20+7}{6} \\
 &= \frac{9}{2}
 \end{aligned}$$