Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^o. Edson

1^o Semestre

Gabarito 2ª Prova **2007**
Data: Quarta-feira, 11 de Julho **Prof^o. Edson**

Exercício 1 *Considere*

$$A = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{2-y} z dx dz dy$$

Temos então, que

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} zx\big|_0^{2-y} dz dy \\ &= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (2-y) z dz dy \\ &= \int_0^2 \tfrac{1}{2}(2-y)z^2\big|_0^{\sqrt{4-y^2}} dy \\ &= \int_0^2 \tfrac{1}{2}(2-y)(4-y^2) dy \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^2 (8-4y-2y^2+y^3) dy \\ &= (4y - y^2 - \tfrac{1}{3}y^3 + \tfrac{1}{8}y^4)\big|_0^2 \\ &= 8-4-\tfrac{8}{3}+2 \\ &= \tfrac{10}{3} \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *A massa do cone em questão pode ser obtida através da seguinte integral*

$$M = \iiint_C \delta(x,y,z) dx dz dy$$

onde $\delta(x,y,z)$ *é a densidade do cone* C *no ponto de coordenadas* (x,y,z).
Como a densidade no ponto (x,y,z) *é proporcional ao quadrado da distância deste ponto ao eixo* z, *segue-se que*

$$\delta(x,y,z) = k(x^2+y^2), k \in \mathbb{R}$$

Assim, usando coordenadas cilíndricas, ou seja

$$\begin{cases} x = r\cos\theta & & 0 \le \theta \le 2\pi \\ y = r\text{sen }\theta & \textit{onde} & 0 \le r \le 1 \\ z = z & & \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1 \end{cases}$$

e

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| = r$$

Desta forma, a massa do cone será

$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 k(x^2+y^2) r dz dr d\theta$$

Resolvendo esta integral, teremos

$$\begin{aligned} M &= k\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 (x^2+y^2) r dz dr d\theta \\ &= k\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^1 r^3 dz dr d\theta \\ &= k\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3 z\big|_r^1 dr d\theta \\ &= k\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^3 - r^4) dr d\theta \\ &= k\int_0^{2\pi} \tfrac{1}{4}r^4 - \tfrac{1}{5}r^5\big|_0^1 d\theta \\ &= \tfrac{k}{20}\int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \tfrac{k\pi}{10} \end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Observe que*

$$4x^2 + y^2 = 9 \Leftrightarrow \left(\frac{2x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$$

Então, a curva γ *pode ser parametrizada da seguinte forma*

$$\gamma : \begin{cases} \frac{2x}{3} = \cos\theta \\ \frac{y}{3} = \text{sen }\theta \end{cases} \quad \textit{com } 0 \le \theta \le 2\pi$$

Desta forma, se considerarmos

$$A = \int_\gamma \frac{-y}{4x^2+y^2}dx + \frac{x}{4x^2+y^2}dy$$

teremos que

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \frac{-3\text{sen }\theta}{9}\frac{-3\text{sen }\theta}{2}d\theta + \frac{3\cos\theta}{2}\frac{3\cos\theta}{9}d\theta \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta\right)d\theta \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \pi \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Considere* $A = (0,1), B = (0,0), C = (1,2)$ *e* C_1 *o caminho que percorre o segmento* AB*,* C_2 *o caminho que percorre o segmento* BC *e por fim,* C_3 *o caminho que percorre o segmento* CA*. Procurando as parametrizações destes caminhos encontramos*

$$C_1 : \begin{cases} x = 0, \\ y = 1 - t, \end{cases} , 0 \le t \le 1$$

$$C_2 : \begin{cases} x = t, \\ y = 2t, \end{cases} , 0 \le t \le 1$$

$$C_3 : \begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 2 - t, \end{cases} , 0 \le t \le 1$$

Então, segue-se que

$$\begin{aligned} \int_\gamma \overrightarrow{F}(x,y)\cdot\overrightarrow{d\gamma} &= \int_{C_1} \overrightarrow{F}(x,y)\cdot\overrightarrow{d\gamma} + \int_{C_2} \overrightarrow{F}(x,y)\cdot\overrightarrow{d\gamma} + \\ &+ \int_{C_3} \overrightarrow{F}(x,y)\cdot\overrightarrow{d\gamma} \end{aligned} \tag{1}$$

onde γ *é a fronteira do triângulo* ABC *e*

$$\overrightarrow{F}(x,y) = (x-y)\overrightarrow{i} + e^{x+y}\overrightarrow{j}$$

Observe que, sobre C_1 *temos* $dx = 0$ *e* $dy = -dt$ *e disto segue-se que*

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \overrightarrow{F}(x,y)\cdot\overrightarrow{d\gamma} &= \int_{C_1} (x-y)dx + e^{x+y}dy \\ &= -\int_0^1 e^{1-t}dt \\ &= e^{1-t}\Big|_0^1 \\ &= 1 - e \end{aligned}$$

do mesmo modo, sobre C_2 *temos* $dx = dt$ *e* $dy = 2dt$*, donde*

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \overrightarrow{F}(x,y)\cdot\overrightarrow{d\gamma} &= \int_{C_2} (x-y)dx + e^{x+y}dy \\ &= \int_0^1 (t-2t)dt + 2e^{t+2t}dt \\ &= \int_0^1 (-t + 2e^{3t})dt \\ &= -\tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{2}{3}e^{3t}\Big|_0^1 \\ &= \tfrac{2}{3}e^3 - \tfrac{7}{6} \end{aligned}$$

e, sobre C_3 *temos* $dx = -dt$ *e* $dy = -dt$*, donde*

$$\begin{aligned} \int_{C_3} \overrightarrow{F}(x,y)\cdot\overrightarrow{d\gamma} &= \int_{C_3} (x-y)dx + e^{x+y}dy \\ &= \int_0^1 (1 - e^{3-2t})dt \\ &= t + \tfrac{1}{2}e^{3-2t}\Big|_0^1 \\ &= 1 + \tfrac{1}{2}e - \tfrac{1}{2}e^3 \end{aligned}$$

Voltando para a equação (1) temos

$$\begin{aligned} \int_\gamma \overrightarrow{F}(x,y)\cdot\overrightarrow{d\gamma} &= 1 - e + \tfrac{2}{3}e^3 - \tfrac{7}{6} + 1 + \tfrac{1}{2}e - \tfrac{1}{2}e^3 \\ &= \tfrac{1}{6}e^3 - \tfrac{1}{2}e + \tfrac{5}{6} \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Para que a forma diferencial*

$$3x^{m+1}y^{n+1}dx + 2x^{m+2}y^n dy$$

seja exata, é necessário que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(2x^{m+2}y^n\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^{m+1}y^{n+1}\right)$$

ou seja,

$$2(m+2)x^{m+1}y^n = 3(n+1)x^{m+1}y^n$$

Para que esta equação seja verdadeira, é necessário que

$$2(m+2) = 3(n+1)$$

isto é,

$$2m - 3n = -1$$

Logo, se tomarmos $m = 1$ *e* $n = 1$ *teremos a equação satisfeita e portanto, segue que existem números naturais para os quais a forma diferencial dada é exata.* ■