

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof. Edson

1º Semestre

Gabarito 1ª Prova
Data: Sábado, 21 de Abril

2007
Prof. Edson

Exercício 1 *Considere*

$$F(x, y, z) = (F^1(x, y, z), F^2(x, y, z), F^3(x, y, z))$$

$$G(x, y, z) = (G^1(x, y, z), G^2(x, y, z), G^3(x, y, z))$$

Observe que

$$\nabla \times \vec{F} = (F_y^3 - F_z^2, F_z^1 - F_x^3, F_x^2 - F_y^1)$$

$$\nabla \times \vec{G} = (G_y^3 - G_z^2, G_z^1 - G_x^3, G_x^2 - G_y^1)$$

Teremos então

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) &= \operatorname{div} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F^1 & F^2 & F^3 \\ G^1 & G^2 & G^3 \end{vmatrix} \\ &= \operatorname{div} (F^2 G^3 - G^2 F^3, G^1 F^3 - F^1 G^3, \\ &\quad F^1 G^2 - G^1 F^2) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (F^2 G^3 - G^2 F^3) + \\ &\quad \frac{\partial}{\partial y} (G^1 F^3 - F^1 G^3) + \\ &\quad \frac{\partial}{\partial z} (F^1 G^2 - G^1 F^2) \\ &= F_x^2 G^3 + F_y^2 G^3 - G_x^2 F^3 - G_y^2 F^3 + \\ &\quad G_y^1 F^3 + G^1 F_y^3 - F_y^1 G^3 - F^1 G_y^3 + \\ &\quad F_z^1 G^2 + F^1 G_z^2 - G_z^1 F^2 - G^1 F_z^2 \\ &= G^1 (F_y^3 - F_z^2) + G^2 (F_z^1 - F_x^3) + \\ &\quad G^3 (F_x^2 - F_y^1) - F^1 (G_y^3 - G_z^2) - \\ &\quad F^2 (G_z^1 - G_x^3) - F^3 (G_x^2 - G_y^1) \\ &= \vec{G} \cdot (\nabla \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\nabla \times \vec{G}) \end{aligned}$$

■

Exercício 2

a). Considere a seguinte mudança de variável

$$\begin{cases} u = y - x^2 \\ v = x \end{cases}$$

teremos com isto

$$\begin{cases} x = v \\ y = u - v^2 \end{cases}$$

e o jacobiano desta mudança será

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2v \end{vmatrix} = 1$$

e além disso

$$\begin{aligned} x = 0 &\Rightarrow v = 0 \\ y = 1 + x^2 &\Rightarrow u = 1 \\ y = 1 + x^2 &\Rightarrow u = 2 \\ y = x + x^2 &\Rightarrow u = v \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \iint_B \frac{e^{y-x^2}}{y-x^2} dx dy &= \int_1^2 \int_0^u \frac{e^u}{u} dv du \\ &= \int_1^2 \frac{e^u}{u} v \Big|_0^u du \\ &= \int_1^2 e^u du \\ &= e^u \Big|_1^2 \\ &= e^2 - e \end{aligned}$$

□

b). Observe que

$$4x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow (2x)^2 + y^2 = 1$$

então, usando coordenadas polares, podemos representar a região

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$$

da seguinte maneira

$$\begin{cases} 2x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

com

$$\begin{aligned} 0 &\leq r \leq 1 \\ 0 &\leq \theta \leq \pi \end{aligned}$$

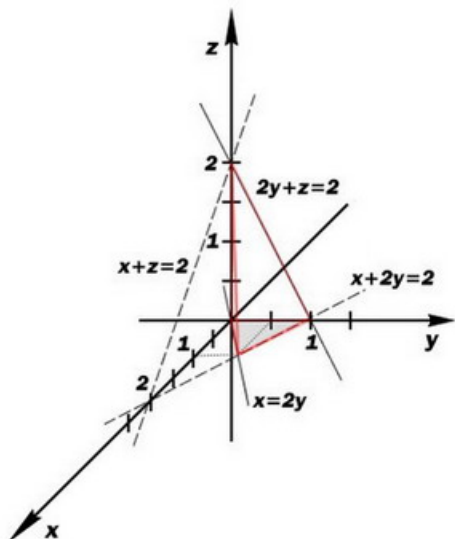
e

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{2} \cos \theta & -\frac{1}{2} r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{array} \right| = \frac{1}{2} r$$

Logo

$$\begin{aligned} \iint_B x^2 dx dy &= \int_0^1 \int_0^\pi \frac{1}{4} r^2 \cos^2 \theta \frac{1}{2} r d\theta dr \\ &= \frac{1}{8} \int_0^1 \int_0^\pi r^3 \cos^2 \theta d\theta dr \\ &= \frac{1}{8} \int_0^1 r^3 \left(\frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right) \Big|_0^\pi \\ &= \frac{\pi}{16} \int_0^1 r^3 dr \\ &= \frac{\pi}{16} \frac{r^4}{4} \Big|_0^1 \\ &= \frac{\pi}{64} \end{aligned}$$

Exercício 3 Esboçando a região dada obtemos o seguinte desenho:



Desta forma, o tetraedro em questão pode ser representado pelo conjunto

$$R = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq x \leq 1, \frac{x}{2} \leq y \leq \frac{2-x}{2}, 0 \leq z \leq 2-x-2y \right\}$$

e seu volume pode ser obtido da seguinte forma

$$\begin{aligned} V &= \iiint_R dx dy dz \\ &= \int_0^1 \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{2-x}{2}} \int_0^{2-x-2y} dz dy dx \\ &= \int_0^1 \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{2-x}{2}} (2-x-2y) dy dx \\ &= \int_0^1 (2y - xy - y^2) \Big|_{\frac{x}{2}}^{\frac{2-x}{2}} dx \\ &= \int_0^1 (1 - 2x + x^2) dx \\ &= x - x^2 + \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Exercício 4 Observe o seguinte

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 = 1$$

Usando coordenadas polares podemos representar esta equação da seguinte forma

$$\begin{cases} \frac{x}{a} = r \cos \theta \\ \frac{y}{b} = r \sin \theta \end{cases}$$

onde

$$\begin{aligned} 0 &\leq r \leq 1 \\ 0 &\leq \theta \leq 2\pi \end{aligned}$$

e

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = \left| \begin{array}{cc} a \cos \theta & -a r \sin \theta \\ b \sin \theta & b r \cos \theta \end{array} \right| = abr$$

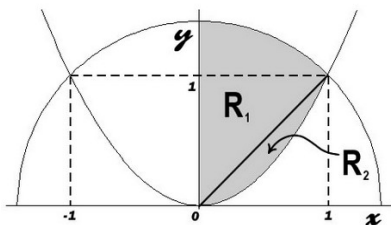
Assim, a área A da região R delimitada pelo gráfico

desta equação é dado por

$$\begin{aligned}
 A &= \iint_R dx dy \\
 &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right| d\theta dr \\
 &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} abr d\theta dr \\
 &= \int_0^1 abr\theta \Big|_0^{2\pi} dr \\
 &= 2\pi ab \int_0^1 r dr \\
 &= \pi ab r^2 \Big|_0^1 \\
 &= \pi ab
 \end{aligned}$$

■

Exercício 5 A região onde esta integral deve ser calculada, está limitada pelas retas $x = 0$, $x = 1$ e pelas curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{2-x^2}$, cujo gráfico pode ser representado pela região escura no gráfico abaixo



Usando coordenadas polares, ou seja

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

cujos jacobiano é

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right| = r$$

Dividindo o domínio de integração nas regiões R_1 e R_2 conforme aparece na figura acima, podemos de-

screvê-las em coordenadas polares da seguinte forma

$$R_1 : \begin{cases} 0 \leq r \leq \sqrt{2} \\ \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$R_2 : \begin{cases} 0 \leq r \leq \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Desta forma, segue-se que

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} dy dx &= \iint_{R_1} r^2 dr d\theta + \iint_{R_2} r^2 dr d\theta \\
 &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{2}} r^2 dr d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}} r^2 dr d\theta \\
 &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^3}{3} \Big|_0^{\sqrt{2}} d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{r^3}{3} \Big|_0^{\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}} d\theta \\
 &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 \theta}{3 \cos^6 \theta} d\theta \\
 &= \frac{\sqrt{2}\pi}{6} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 \theta}{3 \cos^6 \theta} d\theta
 \end{aligned}$$

Usando mudança de variáveis, tome

$$u = \cos \theta$$

e observe que

$$du = -\sin \theta d\theta$$

$$\theta = 0 \Rightarrow u = 1$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e além disso, perceba que

$$\begin{aligned}
 \sin^3 \theta d\theta &= \sin^2 \theta \sin \theta d\theta \\
 &= (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta \\
 &= -(1 - u^2) du \\
 &= (u^2 - 1) du
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen}^3 \theta}{3 \cos^6 \theta} d\theta &= \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{u^2-1}{u^6} du \\
 &= \frac{1}{3} \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (u^{-4} - u^{-6}) du \\
 &= \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3u^3} + \frac{1}{5u^5} \right) \Big|_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\
 &= \frac{1}{3} \left(-\frac{4}{3\sqrt{2}} + \frac{8}{5\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) \\
 &= \frac{1}{3} \left(-\frac{4}{3\sqrt{2}} + \frac{8}{5\sqrt{2}} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \\
 &= \frac{2\sqrt{2}+2}{45}
 \end{aligned}$$

e conseqüentemente

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} dy dx &= \frac{\sqrt{2}\pi}{6} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen}^3 \theta}{3 \cos^6 \theta} d\theta \\
 &= \frac{\sqrt{2}\pi}{6} + \frac{2\sqrt{2}+2}{45}
 \end{aligned}$$

■