Universidade Federal do Vale do São Francisco
Coelgiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof$^{\text{o}}$. Edson

1ª Prova | **1º Semestre** | **2007**

Data: Segunda-feira, 02 de Abril de 2007 | **Duração: 13:00 - 15:00**

Problema 1 *Sejam $\vec{F}$ e $\vec{G}$ dois campos vetoriais definidos no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, cujas componentes admitem derivadas parciais em Ω. Prove que*

$$\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\nabla \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\nabla \times \vec{G})$$

Problema 2 *Calcule as integrais:*

a). $\displaystyle\iint_B \frac{e^{y-x^2}}{y-x^2}dxdy$ *onde* B *é o conjunto de todos os* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *tais que* $1+x^2 \leq y \leq 2+x^2$, $y \geq x + x^2$ *e* $x \geq 0$.

b). $\displaystyle\iint_B x^2 dxdy$ *onde* B *é o conjunto de todos os* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *tais que* $4x^2 + y^2 \leq 1$ *e* $y \geq 0$.

Problema 3 *Determine o volume do tetraedro limitado pelos planos* $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$, *e* $z = 0$.

Problema 4 *Usando integral dupla, calcule a área da região limitada pela elipse*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > 0, b > 0$$

Problema 5 *Usando coordenadas polares, resolva a seguinte integral*

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dydx$$

Boa sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^o. Edson

1^o Semestre

Gabarito 1ª Prova **2007**
Data: Sábado, 21 de Abril **Prof^o. Edson**

Exercício 1 *Considere*

$$F(x,y,z) = \left(F^1(x,y,z), F^2(x,y,z), F^3(x,y,z)\right)$$

$$G(x,y,z) = \left(G^1(x,y,z), G^2(x,y,z), G^3(x,y,z)\right)$$

Observe que

$$\nabla \times \overrightarrow{F} = \left(F_y^3 - F_z^2, F_z^1 - F_x^3, F_x^2 - F_y^1\right)$$

$$\nabla \times \overrightarrow{G} = \left(G_y^3 - G_z^2, G_z^1 - G_x^3, G_x^2 - G_y^1\right)$$

Teremos então

$$\begin{aligned}
div\left(\vec{F} \times \vec{G}\right) &= div \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ F^1 & F^2 & F^3 \\ G^1 & G^2 & G^3 \end{vmatrix} \\
&= div\left(F^2G^3 - G^2F^3, G^1F^3 - F^1G^3, \right.\\
&\quad \left. F^1G^2 - G^1F^2\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(F^2G^3 - G^2F^3\right) + \\
&\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(G^1F^3 - F^1G^3\right) + \\
&\quad \frac{\partial}{\partial z}\left(F^1G^2 - G^1F^2\right) \\
&= F_x^2G^3 + F^2G_x^3 - G_x^2F^3 - G^2F_x^3 + \\
&\quad G_y^1F^3 + G^1F_y^3 - F_y^1G^3 - F^1G_y^3 + \\
&\quad F_z^1G^2 + F^1G_z^2 - G_z^1F^2 - G^1F_z^2 \\
&= G^1\left(F_y^3 - F_z^2\right) + G^2\left(F_z^1 - F_x^3\right) + \\
&\quad G^3\left(F_x^2 - F_y^1\right) - F^1\left(G_y^3 - G_z^2\right) - \\
&\quad F^2\left(G_z^1 - G_x^3\right) - F^3\left(G_x^2 - G_y^1\right) \\
&= \overrightarrow{G} \cdot \left(\nabla \times \overrightarrow{F}\right) - \overrightarrow{F} \cdot \left(\nabla \times \overrightarrow{G}\right)
\end{aligned}$$

■

Exercício 2

a). Considere a seguinte mudança de variável

$$\begin{cases} u = y - x^2 \\ v = x \end{cases}$$

teremos com isto

$$\begin{cases} x = v \\ y = u - v^2 \end{cases}$$

e o jacobiano desta mudança será

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2v \end{vmatrix} = 1$$

e além disso

$$\begin{array}{lcl} x = 0 & \Rightarrow & v = 0 \\ y = 1 + x^2 & \Rightarrow & u = 1 \\ y = 1 + x^2 & \Rightarrow & u = 2 \\ y = x + x^2 & \Rightarrow & u = v \end{array}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\iint\limits_B \frac{e^{y-x^2}}{y-x^2}dxdy &= \int_1^2\int_0^u \frac{e^u}{u}dvdu \\
&= \int_1^2 \frac{e^u}{u}\left. v\right|_0^u du \\
&= \int_1^2 e^u du \\
&= \left. e^u\right|_1^2 \\
&= e^2 - e
\end{aligned}$$

□

b). Observe que

$$4x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow (2x)^2 + y^2 = 1$$

então, usando coordenadas polares, podemos representar a região

$$B = \left\{(x,y) \in R^2 \middle| 4x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\right\}$$

da seguinte maneira

$$\begin{cases} 2x = r\cos\theta \\ y = r\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

com

$$0 \leq r \leq 1$$
$$0 \leq \theta \leq \pi$$

e

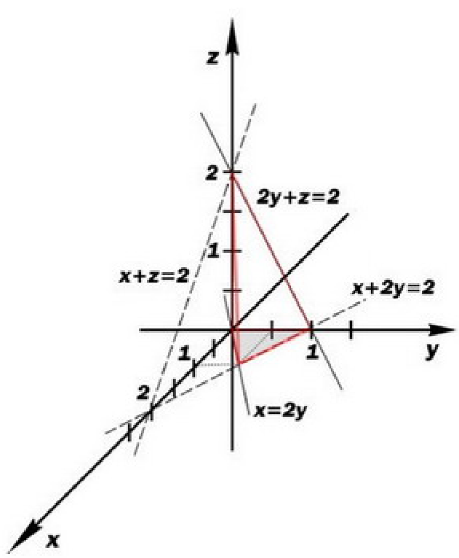
$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \left|\begin{array}{cc} \frac{1}{2}\cos\,\theta & -\frac{1}{2}r\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\,\theta \end{array}\right| = \frac{1}{2}r$$

Logo

$$\begin{aligned}
\iint\limits_B x^2 dxdy &= \int\limits_0^1\int\limits_0^\pi \tfrac{1}{4}r^2\cos^2\theta\tfrac{1}{2}rd\theta dr \\
&= \tfrac{1}{8}\int\limits_0^1\int\limits_0^\pi r^3\cos^2\theta d\theta dr \\
&= \tfrac{1}{8}\int\limits_0^1 r^3\,\left(\tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{4}\sin 2\theta\right)\Big|_0^\pi \\
&= \tfrac{\pi}{16}\int\limits_0^1 r^3 dr \\
&= \tfrac{\pi}{16}\,\tfrac{r^4}{4}\Big|_0^1 \\
&= \tfrac{\pi}{64}
\end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Esboçando a região dada obtemos o seguinte desenho:*



Desta forma, o tetraedro em questão pode ser representado pelo conjunto

$$R = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq x \leq 1, \tfrac{x}{2} \leq y \leq \tfrac{2-x}{2},\ 0 \leq z \leq 2 - x - 2y\right\}$$

e seu volume pode ser obtido da seguinte forma

$$\begin{aligned}
V &= \iiint_R dxdydz \\
&= \int_0^1\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{2-x}{2}}\int_0^{2-x-2y} dzdydx \\
&= \int_0^1\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{2-x}{2}} (2-x-2y)\,dydx \\
&= \int_0^1 \left(2y - xy - y^2\right)\Big|_{\frac{x}{2}}^{\frac{2-x}{2}} dx \\
&= \int_0^1 \left(1 - 2x + x^2\right) dx \\
&= x - x^2 + \tfrac{1}{3}x^3\Big|_0^1 \\
&= \tfrac{1}{3}
\end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Observe o seguinte*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Usando coordenadas polares podemos representar esta equação da seguinte forma

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = r\cos\,\theta \\[2ex] \dfrac{y}{b} = r\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

onde

$$0 \leq r \leq 1$$
$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

e

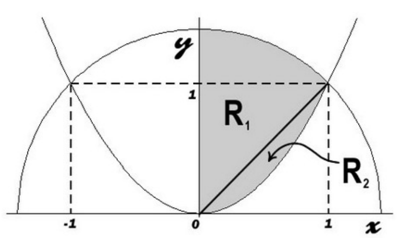
$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \left|\begin{array}{cc} a\cos\,\theta & -ar\mathrm{sen}\,\theta \\ b\mathrm{sen}\,\theta & br\cos\,\theta \end{array}\right| = abr$$

Assim, a área A da região R delimitada pelo gráfico *desta equação é dado por*

$$
\begin{aligned}
A &= \iint_R dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right| d\theta dr \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} abr d\theta dr \\
&= \int_0^1 abr\theta\Big|_0^{2\pi} dr \\
&= 2\pi ab \int_0^1 rdr \\
&= \pi abr^2\Big|_0^1 \\
&= \pi ab
\end{aligned}
$$

■

Exercício 5 *A região onde esta integral deve ser calculada, está limitada pelas retas $x = 0$, $x = 1$ e pelas curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{2 - x^2}$, cujo gráfico pode ser representado pela região escura no gráfico abaixo*



Usando coordenadas polares, ou seja

$$x = r\cos\,\theta$$

$$y = r\text{sen}\,\theta$$

cujo jacobiano é

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial\,(r,\theta)} \right| = r$$

Dividindo o domínio de integração nas regiões R_1 e R_2 conforme aparece na figura acima, podemos descrevê-las em coordenadas polares da seguinte forma

$$R_1 : \begin{cases} 0 \le r \le \sqrt{2} \\ \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$R_2 : \begin{cases} 0 \le r \le \frac{\text{sen}\;\theta}{\cos^2\theta} \\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Desta forma, segue-se que

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}dydx &= \iint_{R_1} r^2 drd\theta + \iint_{R_2} r^2 drd\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{2}} r^2 drd\theta + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\text{sen}\;\theta}{\cos^2\theta}} r^2 drd\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^3}{3}\Big|_0^{\sqrt{2}} d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{r^3}{3}\Big|_0^{\frac{\text{sen}\;\theta}{\cos^2\theta}} d\theta \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\text{sen}^3\theta}{3\cos^6\theta} d\theta \\
&= \frac{\sqrt{2}\pi}{6} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\text{sen}^3\theta}{3\cos^6\theta} d\theta
\end{aligned}
$$

Usando mudança de variáveis, tome

$$u = \cos\;\theta$$

e observe que

$$du = -\text{sen}\;\theta d\theta$$

$$\theta = 0 \Rightarrow u = 1$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e além disso, perceba que

$$
\begin{aligned}
\text{sen}^3\theta d\theta &= \text{sen}^2\theta\text{sen}\;\theta d\theta \\
&= (1-\cos^2\theta)\text{sen}\;\theta d\theta \\
&= -(1-u^2)du \\
&= (u^2-1)du
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{sen}^3\theta}{3\cos^6\theta} d\theta = \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{u^2-1}{u^6} du$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(u^{-4} - u^{-6}\right) du$$

$$= \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3u^3} + \frac{1}{5u^5}\right)\Big|_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= \frac{1}{3}\left(-\frac{4}{3\sqrt{2}} + \frac{8}{5\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(-\frac{4}{3\sqrt{2}} + \frac{8}{5\sqrt{2}} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{2}+2}{45}$$

e conseqüentemente

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dy dx = \frac{\sqrt{2}\pi}{6} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{sen}^3\theta}{3\cos^6\theta} d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{2}\pi}{6} + \frac{2\sqrt{2}+2}{45}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Coelgiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^o. Edson

2ª Prova **1º Semestre** **2007**

Data: Quarta-feira, 09 de Maio de 2007 **Duração: 13:00 - 15:00**

Problema 1 *Calcule*
$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{2-y} z\,dx\,dz\,dy$$

Problema 2 *Calcule a massa do cone* $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1$ *sendo a densidade no ponto* (x, y, z) *proporcional ao quadrado da distância do ponto ao eixo* z*.*

Problema 3 *Calcule*
$$\int_\gamma \frac{-y}{4x^2+y^2}dx + \frac{x}{4x^2+y^2}dy$$
onde γ *tem por imagem a elipse* $4x^2+y^2=9$ *e o sentido de percurso é o anti-horário.*

Problema 4 *Calcule*
$$\int_\gamma (x-y)dx + e^{x+y}dy$$
onde γ *é a fronteira do triângulo de vértices* $(0,0), (0,1)$ *e* $(1,2)$*, orientada no sentido anti-horário.*

Problema 5 *Mostre que existem naturais* m *e* n *para os quais a forma diferencial*
$$3x^{m+1}y^{n+1}dx + 2x^{m+2}y^n dy$$
é exata.

Boa sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^o. Edson

1^o Semestre

Gabarito 2ª Prova **2007**
Data: Quarta-feira, 11 de Julho **Prof^o. Edson**

Exercício 1 *Considere*

$$A=\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}}\int_0^{2-y} z\,dxdzdy$$

Temos então, que

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}} zx\Big|_0^{2-y} dzdy \\
&= \int_0^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}} (2-y)zdzdy \\
&= \int_0^2 \tfrac{1}{2}(2-y)z^2\Big|_0^{\sqrt{4-y^2}} dy \\
&= \int_0^2 \tfrac{1}{2}(2-y)(4-y^2)dy \\
&= \tfrac{1}{2}\int_0^2 (8-4y-2y^2+y^3)dy \\
&= (4y-y^2-\tfrac{1}{3}y^3+\tfrac{1}{8}y^4)\Big|_0^2 \\
&= 8-4-\tfrac{8}{3}+2 \\
&= \tfrac{10}{3}
\end{aligned}$$

■

Exercício 2 *A massa do cone em questão pode ser obtida através da seguinte integral*

$$M=\iiint_C \delta(x,y,z)dxdzdy$$

onde $\delta(x,y,z)$ é a densidade do cone C no ponto de coordenadas (x,y,z).
Como a densidade no ponto (x,y,z) é proporcional ao quadrado da distância deste ponto ao eixo z, segue-se que

$$\delta(x,y,z)=k(x^2+y^2), k\in\mathbb{R}$$

Assim, usando coordenadas cilíndricas, ou seja

$$\begin{cases} x=r\cos\theta & & 0\le\theta\le 2\pi \\ y=r\,\mathrm{sen}\,\theta & \textit{onde} & 0\le r\le 1 \\ z=z & & \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1 \end{cases}$$

e

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right|=r$$

Desta forma, a massa do cone será

$$M=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 k(x^2+y^2)rdzdrd\theta$$

Resolvendo esta integral, teremos

$$\begin{aligned}
M &= k\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 (x^2+y^2)rdzdrd\theta \\
&= k\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^1 r^3dzdrd\theta \\
&= k\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3z\Big|_r^1 drd\theta \\
&= k\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^3-r^4)drd\theta \\
&= k\int_0^{2\pi} \tfrac{1}{4}r^4-\tfrac{1}{5}r^5\Big|_0^1 d\theta \\
&= \tfrac{k}{20}\int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \tfrac{k\pi}{10}
\end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Observe que*

$$4x^2+y^2=9 \Leftrightarrow \left(\frac{2x}{3}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2=1$$

Então, a curva γ pode ser parametrizada da seguinte forma

$$\gamma:\begin{cases} \frac{2x}{3}=\cos\theta \\ \frac{y}{3}=\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \quad \textit{com } 0\le\theta\le 2\pi$$

Desta forma, se considerarmos

$$A=\int_\gamma \frac{-y}{4x^2+y^2}dx+\frac{x}{4x^2+y^2}dy$$

teremos que

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \frac{-3\text{sen }\theta}{9}\frac{-3\text{sen }\theta}{2}d\theta + \frac{3\cos\theta}{2}\frac{3\cos\theta}{9}d\theta \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\text{sen}^2\ \theta + \cos^2\theta\right) d\theta \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \pi \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Considere $A = (0,1), B = (0,0), C = (1,2)$ e C_1 o caminho que percorre o segmento AB, C_2 o caminho que percorre o segmento BC e por fim, C_3 o caminho que percorre o segmento CA. Procurando as parametrizações destes caminhos encontramos*

$$C_1 : \begin{cases} x = 0, \\ y = 1 - t, \end{cases} , 0 \le t \le 1$$
$$C_2 : \begin{cases} x = t, \\ y = 2t, \end{cases} , 0 \le t \le 1$$
$$C_3 : \begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 2 - t, \end{cases} , 0 \le t \le 1$$

Então, segue-se que

$$\begin{aligned} \int_\gamma \overrightarrow{F}(x,y)\cdot\overrightarrow{d\gamma} &= \int_{C_1} \overrightarrow{F}(x,y)\cdot\overrightarrow{d\gamma} + \int_{C_2} \overrightarrow{F}(x,y)\cdot\overrightarrow{d\gamma} + \\ &+ \int_{C_3} \overrightarrow{F}(x,y)\cdot\overrightarrow{d\gamma} \end{aligned} \tag{1}$$

onde γ é a fronteira do triângulo ABC e

$$\overrightarrow{F}(x,y) = (x-y)\overrightarrow{i} + e^{x+y}\overrightarrow{j}$$

Observe que, sobre C_1 temos $dx = 0$ e $dy = -dt$ e disto segue-se que

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \overrightarrow{F}(x,y)\cdot\overrightarrow{d\gamma} &= \int_{C_1} (x-y)dx + e^{x+y}dy \\ &= -\int_0^1 e^{1-t}dt \\ &= e^{1-t}\Big|_0^1 \\ &= 1 - e \end{aligned}$$

do mesmo modo, sobre C_2 temos $dx = dt$ e $dy = 2dt$, donde

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \overrightarrow{F}(x,y)\cdot\overrightarrow{d\gamma} &= \int_{C_2} (x-y)dx + e^{x+y}dy \\ &= \int_0^1 (t-2t)dt + 2e^{t+2t}dt \\ &= \int_0^1 (-t + 2e^{3t})dt \\ &= -\tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{2}{3}e^{3t}\Big|_0^1 \\ &= \tfrac{2}{3}e^3 - \tfrac{7}{6} \end{aligned}$$

e, sobre C_3 temos $dx = -dt$ e $dy = -dt$, donde

$$\begin{aligned} \int_{C_3} \overrightarrow{F}(x,y)\cdot\overrightarrow{d\gamma} &= \int_{C_3} (x-y)dx + e^{x+y}dy \\ &= \int_0^1 (1 - e^{3-2t})dt \\ &= t + \tfrac{1}{2}e^{3-2t}\Big|_0^1 \\ &= 1 + \tfrac{1}{2}e - \tfrac{1}{2}e^3 \end{aligned}$$

Voltando para a equação (1) temos

$$\begin{aligned} \int_\gamma \overrightarrow{F}(x,y)\cdot\overrightarrow{d\gamma} &= 1 - e + \tfrac{2}{3}e^3 - \tfrac{7}{6} + 1 + \tfrac{1}{2}e - \tfrac{1}{2}e^3 \\ &= \tfrac{1}{6}e^3 - \tfrac{1}{2}e + \tfrac{5}{6} \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Para que a forma diferencial*

$$3x^{m+1}y^{n+1}dx + 2x^{m+2}y^n dy$$

seja exata, é necessário que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(2x^{m+2}y^n\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^{m+1}y^{n+1}\right)$$

ou seja,

$$2(m+2)x^{m+1}y^n = 3(n+1)x^{m+1}y^n$$

Para que esta equação seja verdadeira, é necessário que

$$2(m+2) = 3(n+1)$$

isto é,

$$2m - 3n = -1$$

Logo, se tomarmos $m = 1$ e $n = 1$ teremos a equação satisfeita e portanto, segue que existem números naturais para os quais a forma diferencial dada é exata. ■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Coelgiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^o. Edson

3ª Prova **1º Semestre** **2007**

Data: Quarta-feira, 12 de Junho de 2007 **Duração: 13:00 - 15:00**

Problema 1 *Um campo escalar φ que nunca é zero possui as seguintes propriedades*

$$\|\nabla\varphi\|^2 = 4\varphi \text{ e } div(\varphi\nabla\varphi) = 10\varphi$$

Calcule a integral de superfície

$$\iint_S \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS$$

onde S é a superfície de uma esfera unitária com centro na oriegem e $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ é a derivada direcional de φ na direção do vetor n normal unitário exterior a S.

Problema 2 *Sejam f e g campos escalares de classe C^2 sobre um conjunto aberto S do plano. Seja R uma região contida em S, cuja fronteira é uma curva γ contínua por partes. Prove as seguintes identidades*

a). $\oint_\gamma \frac{\partial g}{\partial n} d\gamma = \iint_R \nabla^2 g dxdy$; *onde* $\nabla^2 g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

b). $\oint_\gamma f \frac{\partial g}{\partial n} d\gamma = \iint_R \left(f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g\right) dxdy$.

Problema 3 *Uma esfera está inscrita num cilindro circular reto. A esfera é cortada por dois planos paralelos perpendiculares ao eixo do cilindro. Mostre que a porção da esfera e do cilindro que está entre os planos possuem áreas iguais.*

Problema 4 *Calcule o fluxo para fora, do campo vetorial*

$$F(x,y,z) = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

através do elipsóide $4x^2 + 9y^2 + 6z^2 = 36$.

Problema 5 *Calcule* $\oint_C F \cdot dr$ *onde* $F(x,y,z) = xy\vec{i} + yz\vec{j} + zx\vec{k}$ *e C é o triângulo com vértices $(1,0,0), (0,1,0)$ e $(0,0,1)$ orientado no sentido anti-horário quando visto de cima.*

Boa sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^{o}. Edson

1^{o} Semestre

Gabarito 3^{a} Prova **2007**
Data: Quarta-feira, 11 de Julho **Prof^{o}. Edson**

Exercício 1 *Da definição de derivada direcional segue-se que*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = \nabla\varphi \cdot \mathbf{n}$$

Assim,

$$\iint_S \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} dS = \iint_S \nabla\varphi \cdot \mathbf{n} dS$$

Usando a definição de integral de superfície, teremos

$$\begin{aligned}
\iint_S \nabla\varphi \cdot \mathbf{n} dS &= \iint_S \nabla\varphi \cdot \tfrac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|} \|\mathbf{n}\| \, dudv \\
&= \iint_S \nabla\varphi \cdot \left(\tfrac{\partial\varphi}{\partial u} \times \tfrac{\partial\varphi}{\partial v}\right) dudv \qquad (1) \\
&= \iiint_{\dot{S}} div(\nabla\varphi) dxdydz
\end{aligned}$$

Observe agora que

$$\nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

e disto, temos que

$$div(\nabla\varphi) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

Por outro lado temos também que

$$\varphi\nabla\varphi = \left(\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

donde

$$\begin{aligned}
div(\varphi\nabla\varphi) &= \left(\tfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \varphi\tfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \left(\tfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \varphi\tfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \\
&\quad + \left(\tfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 + \varphi\tfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \\
&= \left[\left(\tfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\tfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\tfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] + \\
&\quad + \varphi\left[\tfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \tfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \tfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right] \\
&= \|\nabla\varphi\|^2 + \varphi div(\nabla\varphi)
\end{aligned}$$

Como

$$\|\nabla\varphi\|^2 = 4\varphi$$

$$div(\varphi\nabla\varphi) = 10\varphi$$

segue-se que

$$10\varphi = 4\varphi + \varphi div(\nabla\varphi) \Leftrightarrow div(\nabla\varphi) = 6$$

Voltando para a equação (1) teremos

$$\begin{aligned}
\iint_S \nabla\varphi \cdot \mathbf{n} dS &= \iiint_{\dot{S}} div(\nabla\varphi) dxdydz \\
&= 6\iiint_{\dot{S}} dxdydz \\
&= 8\pi
\end{aligned}$$

■

Exercício 2

a).

$$\oint_\gamma \frac{\partial g}{\partial n} d\gamma = \oint_\gamma \nabla g \cdot n d\gamma$$

como a curva γ e a região R satisfazem todas as condições do Teorema de Green, segue-se então que

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma \tfrac{\partial g}{\partial n} d\gamma &= \oint_\gamma \nabla g \cdot n d\gamma \\
&= \iint_R div\left(\nabla g\right) dxdy \\
&= \iint_R div\left(\tfrac{\partial g}{\partial x}, \tfrac{\partial g}{\partial y}\right) dxdy \\
&= \iint_R \left(\tfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \tfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right) dxdy \\
&= \iint_R \nabla^2 g dxdy
\end{aligned}$$

□

b).

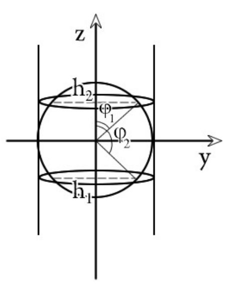
$$\oint_\gamma f\frac{\partial g}{\partial n}d\gamma = \oint_\gamma f\nabla g\cdot n d\gamma$$

como a curva γ e a região R satisfazem todas as condições do Teorema de Green, segue-se então que

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma f\tfrac{\partial g}{\partial n}d\gamma &= \oint_\gamma f\nabla g\cdot n d\gamma\\
&= \iint_R div\,(f\nabla g)\,dxdy\\
&= \iint_R div\left(f\tfrac{\partial g}{\partial x}, f\tfrac{\partial g}{\partial y}\right)dxdy\\
&= \iint_R \left(\tfrac{\partial f}{\partial x}\tfrac{\partial g}{\partial x} + f\tfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \right.\\
&\quad \left. + \tfrac{\partial f}{\partial y}\tfrac{\partial g}{\partial y} + f\tfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)dxdy\\
&= \iint_R \left[\left(\tfrac{\partial f}{\partial x}\tfrac{\partial g}{\partial x} + \tfrac{\partial f}{\partial y}\tfrac{\partial g}{\partial y}\right) + \right.\\
&\quad \left. + f\left(\tfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \tfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)\right]dxdy\\
&= \iint_R \left[\left(\tfrac{\partial f}{\partial x}, \tfrac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot\left(\tfrac{\partial g}{\partial x}, \tfrac{\partial g}{\partial y}\right) + \right.\\
&\quad \left. + f\left(\tfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \tfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)\right]dxdy\\
&= \iint_R \left(\nabla f\cdot\nabla g + f\nabla^2 g\right)dxdy
\end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Sejam h_1 e h_2 as alturas em que os planos cortam a esfera.*



A área A_c do cilindro que está entre os planos é

$$A_c = 2\pi r(h_2 - h_1)$$

Podemos parametrizar a porção σ da superfície da esfera que está entre os planos, da seguinte forma:

$$\sigma : \begin{cases} x = r\text{sen }\theta\text{sen }\varphi \\ y = r\text{cos }\theta\text{sen }\varphi \\ z = r\text{cos }\varphi \end{cases} \quad \textit{onde} \quad \begin{array}{c} 0\le\theta\le 2\pi \\ \varphi_1\le\varphi\le\varphi_2 \end{array}$$

onde

$$\cos\,\varphi_1 = \frac{h_2}{r} \;\; e \; \cos\,\varphi_2 = \frac{h_1}{r}$$

Assim, temos que

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\theta} = (r\text{cos }\theta\text{sen }\varphi, r\text{sen }\theta\text{sen }\varphi, 0)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\varphi} = (r\text{sen }\theta\text{cos }\varphi, r\text{cos }\theta\text{cos }\varphi, -r\text{sen }\varphi)$$

donde

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial\sigma}{\partial\theta}\times\tfrac{\partial\sigma}{\partial\varphi} &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ r\text{cos }\theta\text{sen }\varphi & r\text{sen }\theta\text{sen }\varphi & 0 \\ r\text{sen }\theta\text{cos }\varphi & r\text{cos }\theta\text{cos }\varphi & -r\text{sen }\varphi \end{vmatrix}\\
&= (r^2\text{sen }\theta\text{sen}^2\varphi, r^2\text{cos }\theta\text{sen}^2\varphi, r^2\text{sen }\varphi\text{cos }\varphi)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\left\|\tfrac{\partial\sigma}{\partial\theta}\times\tfrac{\partial\sigma}{\partial\varphi}\right\|^2 &= r^4\text{sen}^2\theta\text{sen}^4\varphi + r^4\text{cos}^2\theta\text{sen}^4\varphi +\\
&\quad + r^4\text{sen}^2\varphi\text{cos}^2\varphi\\
&= r^4\text{sen}^4\varphi + r^4\text{cos}^2\varphi\\
&= r^4\text{sen}^2\varphi
\end{aligned}$$

Logo, a área A_σ da superfície de σ é

$$\begin{aligned}
A_\sigma &= \int_0^{2\pi}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left\|\tfrac{\partial\sigma}{\partial\theta}\times\tfrac{\partial\sigma}{\partial\varphi}\right\|d\varphi d\theta\\
&= \int_0^{2\pi}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2\text{sen }\varphi d\varphi d\theta\\
&= -\int_0^{2\pi} r^2\,\cos\,\varphi|_{\varphi_1}^{\varphi_2}\,d\theta\\
&= -\int_0^{2\pi} r^2(\cos\,\varphi_2 - \cos\,\varphi_1)d\theta\\
&= r^2(\cos\,\varphi_1 - \cos\,\varphi_2)\int_0^{2\pi}d\theta\\
&= 2\pi r^2(\tfrac{h_2}{r} - \tfrac{h_1}{r})\\
&= 2\pi r(h_2 - h_1)
\end{aligned}$$

que é exatamente igual a área do cilindro que está entre os planos que cortam a esfera. ■

Exercício 4 *Observemos incialmente que*

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} - 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} - 3y^2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} - 3z^2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

Assim, temos que

$$\text{div}F(x,y,z) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

para $(x,y,z) \neq (0,0,0)$.
Seja σ *a esfera unitária de centro na origem, com parametrização*

$$\sigma : \begin{cases} x = \text{sen } \theta \text{sen } \varphi \\ y = \cos \theta \text{sen } \varphi \\ z = \cos \varphi \end{cases}$$

Perceba que σ *está dentro da região limitada pelo elipsóide* $4x^2 + 9y^2 + 6z^2 = 36$ *e além disto*

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} = (\cos \theta \text{sen } \varphi, -\text{sen } \theta \text{sen } \varphi, 0)$$
$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} = (\text{sen } \theta \cos \varphi, \cos \theta \cos \varphi, -\text{sen } \varphi)$$

donde temos que, a normal $\mathbf{n}$ *exterior a* σ *é dada por*

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \tfrac{\partial \sigma}{\partial \theta} \times \tfrac{\partial \sigma}{\partial \varphi} \\ &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \cos \theta \text{sen } \varphi & -\text{sen } \theta \text{sen } \varphi & 0 \\ \text{sen } \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\text{sen } \varphi \end{vmatrix} \\ &= (\text{sen } \theta \text{sen}^2 \varphi, \cos \theta \text{sen}^2 \varphi, \text{sen } \varphi \cos \varphi) \end{aligned}$$

O fluxo de F*, para fora, através de* σ *é*

$$\begin{aligned} \iint_\sigma F \cdot \mathbf{n} dS &= \iint_\sigma F(\sigma(\theta,\varphi)) \tfrac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|} \|\mathbf{n}\| \, d\theta d\varphi \\ &= \iint_\sigma F(\sigma(\theta,\varphi)) \cdot \mathbf{n} d\theta d\varphi \end{aligned}$$

mas,

$$\begin{aligned} F(\sigma(\theta,\varphi)) &= F(\text{sen } \theta \text{sen } \varphi, \cos \theta \text{sen } \varphi, \cos \varphi) \\ &= \text{sen } \theta \text{sen } \varphi \overrightarrow{i} + \cos \theta \text{sen } \varphi \overrightarrow{j} + \\ &\quad + \cos \varphi \overrightarrow{k} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} F(\sigma(\theta,\varphi)) \cdot \mathbf{n} &= \text{sen}^2 \theta \text{sen}^3 \varphi + \cos^2 \theta \text{sen}^3 \varphi + \\ &\quad + \text{sen } \varphi \cos^2 \varphi \\ &= \text{sen}^3 \varphi + \text{sen } \varphi \cos^2 \varphi \\ &= \text{sen } \varphi \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \iint_\sigma F \cdot ndS &= \iint_\sigma \text{sen } \varphi d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \text{sen } \varphi d\varphi d\theta \\ &= 2 \int_0^{2\pi} d\theta \\ &4\pi \end{aligned}$$

Assim, considerando ϕ *a região externa a* σ *e interna ao elipsóide* ψ*, segue-se que o fluxo de* F*, através deste pode se dado por*

$$\iint_\psi F \cdot ndS = \iint_\sigma F \cdot ndS + \iint_\phi F \cdot ndS$$

mas,

$$\text{div}F(x,y,z) = 0 \text{ quando } (x,y,z) \in \phi$$

donde, pelo Teorema de Stokes, temos

$$\iint_\phi F \cdot ndS = \iiint_\phi \text{div}F dxdydz = 0$$

Portanto

$$\iint_\psi F \cdot ndS = \iint_\sigma F \cdot ndS = 4\pi$$

■

Exercício 5 *O plano que passa pelos pontos* $(1,0,0), (0,1,0)$ *e* $(0,0,1)$ *possui equação dada por*

$$x + y + z = 1$$

e o triângulo de vértices $(1,0,0), (0,1,0)$ *e* $(0,0,1)$ *pode ser parametrizado da seguinte forma:*

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 1 - u - v \end{cases} \quad \text{com} \quad \begin{array}{c} 0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1 - u \end{array}$$

donde segue-se que

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u} = (1,0,-1)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial v} = (0,1,-1)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u} \times \frac{\partial\sigma}{\partial v} = (1,1,1)$$

Por outro lado, observe que

$$\begin{aligned} F(\sigma(u,v)) &= F(u,v,1-u-v) \\ &= uv\overrightarrow{i} + v(1-u-v)\overrightarrow{j} + u(1-u-v)\overrightarrow{k} \\ rotF &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & yz & zx \end{vmatrix} \\ &= -y\overrightarrow{i} - z\overrightarrow{j} - x\overrightarrow{k} \end{aligned}$$

e

$$rotF(\sigma(u,v))\cdot\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u} \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}\right) = -v-1+u+v-u = -1$$

Usando o teorema de Stokes, temos que

$$\begin{aligned} \oint_C F\cdot dr &= \iint_\sigma rotF\cdot dS \\ &= \iint_\sigma rotF(\sigma(u,v))\cdot\left(\tfrac{\partial\sigma}{\partial u} \times \tfrac{\partial\sigma}{\partial v}\right) dudv \\ &= -\int_0^1\int_0^{1-u} dvdu \\ &= \int_0^1 (u-1)du \\ &= \tfrac{1}{2}u^2 - u\Big|_0^1 \\ &= -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Coelgiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^o. Edson

Prova Final **1^o Semestre** **2007**

Data: Segunda-feira, 02 de Julho de 2007 **Duração: 13:00 - 15:00**

Problema 1 *Calcule as integrais:*

a). $\displaystyle\iint\limits_B \frac{e^{y-x^2}}{y-x^2}dxdy$ *onde* B *é o conjunto de todos os* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *tais que* $1+x^2 \leq y \leq 2+x^2$, $y \geq x + x^2$ *e* $x \geq 0$.

b). $\displaystyle\iint\limits_B x^2 dxdy$ *onde* B *é o conjunto de todos os* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *tais que* $4x^2 + y^2 \leq 1$ *e* $y \geq 0$.

Problema 2 *Determine o volume do tetraedro limitado pelos planos* $x+2y+z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$, *e* $z = 0$.

Problema 3 *Calcule a massa do cone* $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$ *sendo a densidade no ponto* (x, y, z) *proporcional ao quadrado da distância do ponto ao eixo* z.

Problema 4 *Calcule*

$$\int_\gamma \frac{-y}{4x^2 + y^2}dx + \frac{x}{4x^2 + y^2}dy$$

onde γ *tem por imagem a elipse* $4x^2 + y^2 = 9$ *e o sentido de percurso é o anti-horário.*

Problema 5 *Sejam* f *e* g *campos escalares de classe* C^2 *sobre um conjunto aberto* S *do plano. Seja* R *uma região contida em* S, *cuja fronteira é uma curva* γ *contínua por partes. Prove as seguintes identidades*

a). $\displaystyle\oint_\gamma \frac{\partial g}{\partial n} d\gamma = \iint_R \nabla^2 g dxdy$; *onde* $\nabla^2 g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

b). $\displaystyle\oint_\gamma f \frac{\partial g}{\partial n} d\gamma = \iint_R (f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g)\, dxdy$.

Boa sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof$^{\text{o}}$. Edson

1$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito Prova Final **2007**
Data: Quarta-feira, 11 de Julho **Turma M3**

Exercício 1

a). Considere a seguinte mudança de variável

$$\begin{cases} u = y - x^2 \\ v = x \end{cases}$$

teremos com isto

$$\begin{cases} x = v \\ y = u - v^2 \end{cases}$$

e o jacobiano desta mudança será

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2v \end{vmatrix} = 1$$

e além disso

$$\begin{array}{lcl} x = 0 & \Rightarrow & v = 0 \\ y = 1 + x^2 & \Rightarrow & u = 1 \\ y = 1 + x^2 & \Rightarrow & u = 2 \\ y = x + x^2 & \Rightarrow & u = v \end{array}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \iint\limits_B \frac{e^{y-x^2}}{y-x^2} dxdy &= \int_1^2 \int_0^u \frac{e^u}{u} dvdu \\ &= \int_1^2 \tfrac{e^u}{u} \left. v\right|_0^u du \\ &= \int_1^2 e^u du \\ &= \left. e^u \right|_1^2 \\ &= e^2 - e \end{aligned}$$

□

b). Observe que

$$4x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow (2x)^2 + y^2 = 1$$

então, usando coordenadas polares, podemos representar a região

$$B = \left\{ (x,y) \in R^2 \middle| \, 4x^2 + y^2 \le 1, y \ge 0 \right\}$$

da seguinte maneira

$$\begin{cases} 2x = r\text{cos }\theta \\ y = r\text{sen }\theta \end{cases}$$

com

$$\begin{array}{l} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le \pi \end{array}$$

e

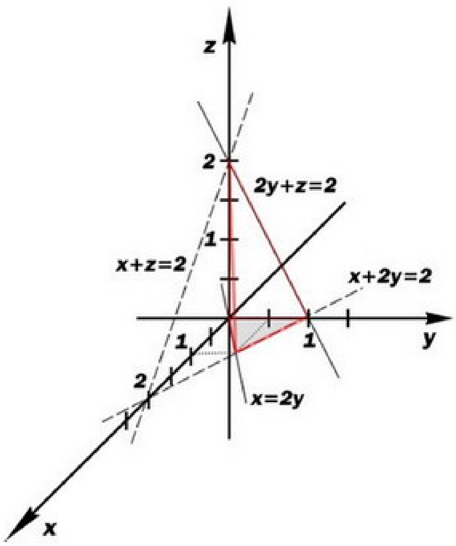
$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\text{cos }\theta & -\frac{1}{2}r\text{sen }\theta \\ \text{sen }\theta & r\text{cos }\theta \end{vmatrix} = \frac{1}{2}r$$

Logo

$$\begin{aligned} \iint\limits_B x^2 dxdy &= \int_0^1 \int_0^\pi \tfrac{1}{4} r^2 \text{cos}^2\theta \tfrac{1}{2} r d\theta dr \\ &= \tfrac{1}{8} \int_0^1 \int_0^\pi r^3 \text{cos}^2\theta d\theta dr \\ &= \tfrac{1}{8} \int_0^1 r^3 \left. \left(\tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{4}\sin 2\theta\right)\right|_0^\pi \\ &= \tfrac{\pi}{16} \int_0^1 r^3 dr \\ &= \tfrac{\pi}{16} \left. \tfrac{r^4}{4} \right|_0^1 \\ &= \tfrac{\pi}{64} \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Esboçando a região dada obtemos o seguinte desenho:*



Desta forma, o tetraedro em questão pode ser representado pelo conjunto

$$R = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 0 \le x \le 1, \tfrac{x}{2} \le y \le \tfrac{2-x}{2}, 0 \le z \le 2-x-2y\right\}$$

e seu volume pode ser obtido da seguinte forma

$$\begin{aligned} V &= \iiint_R dxdydz \\ &= \int_0^1 \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{2-x}{2}} \int_0^{2-x-2y} dzdydx \\ &= \int_0^1 \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{2-x}{2}} (2-x-2y)\, dydx \\ &= \int_0^1 \left(2y - xy - y^2\right)\Big|_{\frac{x}{2}}^{\frac{2-x}{2}} dx \\ &= \int_0^1 \left(1 - 2x + x^2\right) dx \\ &= x - x^2 + \tfrac{1}{3}x^3\Big|_0^1 \\ &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

■

Exercício 3 *A massa do cone em questão pode ser obtida através da seguinte integral*

$$M = \iiint_C \delta(x,y,z)dxdzdy$$

onde $\delta(x,y,z)$ é a densidade do cone C no ponto de coordenadas (x,y,z).
Como a densidade no ponto (x,y,z) é proporcional ao quadrado da distância deste ponto ao eixo z, segue-se que

$$\delta(x,y,z) = k(x^2+y^2), k \in \mathbb{R}$$

Assim, usando coordenadas cilíndricas, ou seja

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\text{sen }\theta \\ z = z \end{cases} \quad \textit{onde} \quad \begin{array}{c} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \\ \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1 \end{array}$$

e

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| = r$$

Desta forma, a massa do cone será

$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 k(x^2+y^2)rdzdrd\theta$$

Resolvendo esta integral, teremos

$$\begin{aligned} M &= k\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 (x^2+y^2)rdzdrd\theta \\ &= k\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^1 r^3dzdrd\theta \\ &= k\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3z\Big|_r^1 drd\theta \\ &= k\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^3-r^4)drd\theta \\ &= k\int_0^{2\pi} \tfrac{1}{4}r^4 - \tfrac{1}{5}r^5\Big|_0^1 d\theta \\ &= \tfrac{k}{20}\int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \tfrac{k\pi}{10} \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Observe que*

$$4x^2+y^2 = 9 \Leftrightarrow \left(\frac{2x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$$

Então, a curva γ pode ser parametrizada da seguinte forma

$$\gamma : \begin{cases} \frac{2x}{3} = \cos\theta \\ \frac{y}{3} = \text{sen }\theta \end{cases} \quad \textit{com } 0 \le \theta \le 2\pi$$

Desta forma, se considerarmos

$$A = \int_\gamma \frac{-y}{4x^2+y^2}dx + \frac{x}{4x^2+y^2}dy$$

teremos que

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \tfrac{-3\text{sen }\theta}{9}\tfrac{-3\text{sen }\theta}{2}d\theta + \tfrac{3\cos\theta}{2}\tfrac{3\cos\theta}{9}d\theta \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\text{sen}^2\ \theta + \cos^2\theta\right)d\theta \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \pi \end{aligned}$$

■

Exercício 5

a).

$$\oint_\gamma \frac{\partial g}{\partial n}d\gamma = \oint_\gamma \nabla g\cdot n d\gamma$$

como a curva γ e a região R satisfazem todas as condições do Teorema de Green, segue-se então que

$$\begin{aligned} \oint_\gamma \tfrac{\partial g}{\partial n}d\gamma &= \oint_\gamma \nabla g\cdot n d\gamma \\ &= \iint_R div\left(\nabla g\right)dxdy \\ &= \iint_R div\left(\tfrac{\partial g}{\partial x},\tfrac{\partial g}{\partial y}\right)dxdy \\ &= \iint_R \left(\tfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\tfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)dxdy \\ &= \iint_R \nabla^2 g dxdy \end{aligned}$$

□

b).

$$\oint_\gamma f\frac{\partial g}{\partial n}d\gamma = \oint_\gamma f\nabla g\cdot n d\gamma$$

como a curva γ e a região R satisfazem todas as condições do Teorema de Green, segue-se então que

$$\begin{aligned} \oint_\gamma f\tfrac{\partial g}{\partial n}d\gamma &= \oint_\gamma f\nabla g\cdot n d\gamma \\ &= \iint_R div\left(f\nabla g\right)dxdy \\ &= \iint_R div\left(f\tfrac{\partial g}{\partial x}, f\tfrac{\partial g}{\partial y}\right)dxdy \\ &= \iint_R \left(\tfrac{\partial f}{\partial x}\tfrac{\partial g}{\partial x} + f\tfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \right. \\ &\quad \left. + \tfrac{\partial f}{\partial y}\tfrac{\partial g}{\partial y} + f\tfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)dxdy \\ &= \iint_R \left[\left(\tfrac{\partial f}{\partial x}\tfrac{\partial g}{\partial x} + \tfrac{\partial f}{\partial y}\tfrac{\partial g}{\partial y}\right) + \right. \\ &\quad \left. + f\left(\tfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \tfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)\right]dxdy \\ &= \iint_R \left[\left(\tfrac{\partial f}{\partial x},\tfrac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot\left(\tfrac{\partial g}{\partial x},\tfrac{\partial g}{\partial y}\right) + \right. \\ &\quad \left. + f\left(\tfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \tfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)\right]dxdy \\ &= \iint_R \left(\nabla f\cdot\nabla g + f\nabla^2 g\right)dxdy \end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof$^{\text{o}}$. Edson

1ª Prova | **1º Semestre** | **2008**

Data: Novembro de 2007 | **Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Usando a integral dupla, calcule a área do conjunto*

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, xy \leq 2, x \leq y \leq x + 1, x \geq 0 \right\}$$

Problema 2 *Calcule a integral a integral dupla*

$$\int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} xydydx$$

Problema 3 *Determine a massa e o centro de massa da lâmina plana delimitada pelos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $0 \leq x \leq 1$ e $x \leq y \leq x + 1$ cuja densidade no ponto (x, y) é o produto entre suas coordenadas.*

Problema 4 *Calcule as integrais:*

a). $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)};$

b). $\displaystyle\int \text{arcsen}\, x dx.$

Problema 5 *Calcule a área da região delimitada pelas curvas $x = y^2$ e $y = x - 2$.*

Boa sorte!

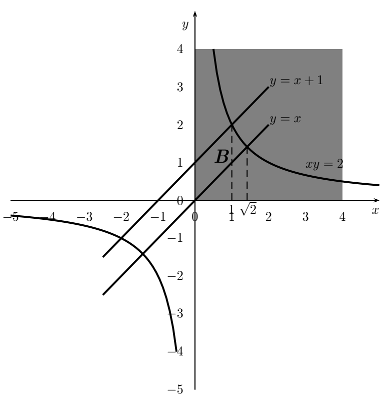
Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^o. Edson

1^o Semestre

Gabarito 1ª Prova **2008**
Data: Março **Turma 31**

Exercício 1 *Esboçando um gráfico do conjunto B obtemos*



Donde segue-se que

$$B = B_1 \cup B_2$$

onde

$$B_1 : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x \leq y \leq x + 1 \end{cases}$$

e

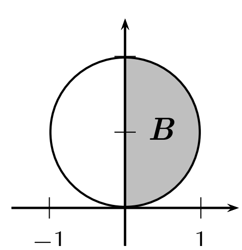
$$B_2 : \begin{cases} 1 \leq x \leq \sqrt{2} \\ x \leq y \leq \dfrac{2}{x} \end{cases}$$

Logo

$$\begin{aligned} \acute{A}rea(B) &= \iint_B dxdy \\ &= \iint_{B_1} dxdy + \iint_{B_2} dxdy \\ &= \int_0^1 \int_x^{x+1} dydx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_x^{\frac{2}{x}} dydx \\ &= \int_0^1 y|_x^{x+1} dx + \int_1^{\sqrt{2}} y|_x^{\frac{2}{x}} dx \\ &= \int_0^1 dx + \int_1^{\sqrt{2}} \left(\tfrac{2}{x} - x\right) dx \\ &= x|_0^1 + \left(2\ln|x| - \tfrac{1}{2}x^2\right)\Big|_1^{\sqrt{2}} \\ &= 1 + 2\ln\sqrt{2} - 1 + \tfrac{1}{2} \\ &= \tfrac{1}{2} + \ln 2 \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Observe que o domínio de integração é o conjunto B, conforme está esboçado na figura abaixo*



Assim, considerando

$$A = \int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} xydydx$$

teremos que

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \tfrac{1}{2}xy^2\Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_0^1 \tfrac{1}{2}x\left[\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^2 - \left(1-\sqrt{1-x^2}\right)^2\right] dx \\ &= \int_0^1 \tfrac{1}{2}x\left[\left(2+2\sqrt{1-x^2}-x^2\right) - \right. \\ &\quad \left. -\left(2-2\sqrt{1-x^2}-x^2\right)\right] dx \\ &= \int_0^1 \tfrac{1}{2}x\left[2+2\sqrt{1-x^2}-x^2 - \right. \\ &\quad \left. -2+2\sqrt{1-x^2}+x^2\right] dx \\ &= \int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}dx \end{aligned}$$

Considere

$$z = 1 - x^2$$

e observe que

$$dz = -2xdx$$

e

$$x = 0 \Rightarrow z = 1$$

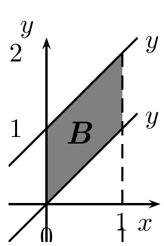
$$x = 1 \Rightarrow z = 0$$

Assim, segue-se que

$$\begin{aligned} \int_0^1\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} xydydx &= \int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}dx \\ &= -\int_1^0 \sqrt{z}dz \\ &= \int_0^1 \sqrt{z}dz \\ &= \tfrac{2}{3}\sqrt{z^3}\Big|_0^1 \\ &= \tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

■

Exercício 3 *O conjunto B tem a seguinte representação gráfica*



Pelo exposto no problema, temos que a densidade no ponto (x, y) é dada por

$$\delta(x, y) = xy$$

Assim, a massa do conjunto B, é dada por

$$\begin{aligned} \iint_B \delta(x,y)dxdy &= \int_0^1\int_x^{x+1} xydydx \\ &= \int_0^1 \tfrac{1}{2}xy^2\Big|_x^{x+1} dx \\ &= \int_0^1 \tfrac{1}{2}x\left[(x+1)^2 - x^2\right] dx \\ &= \int_0^1 \tfrac{1}{2}x(2x+1)dx \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^1 (2x^2+x)dx \\ &= \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2\right]_0^1 \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{2}\right) \\ &= \tfrac{7}{12} \end{aligned}$$

Além disso, se chamarmos de (x_c, y_c) o centro de massa do conjunto B, teremos então

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{\iint_B x\delta(x,y)dxdy}{\iint_B \delta(x,y)dxdy} \\ &= \tfrac{12}{7}\iint_B x^2ydxdy \\ &= \tfrac{12}{7}\int_0^1\int_x^{x+1} x^2ydydx \\ &= \tfrac{6}{7}\int_0^1 x^2y^2\Big|_x^{x+1} dx \\ &= \tfrac{6}{7}\int_0^1 (2x^3+x^2)dx \\ &= \tfrac{5}{7} \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
y_c &= \frac{\iint_B y\delta(x,y)dxdy}{\iint_B \delta(x,y)dxdy} \\
&= \tfrac{12}{7}\iint_B xy^2 dxdy \\
&= \tfrac{12}{7}\int_0^1\int_x^{x+1} xy^2 dydx \\
&= \tfrac{4}{7}\int_0^1 xy^3\big|_x^{x+1} dx \\
&= \tfrac{4}{7}\int_0^1 x[(x+1)^3-x^3]dx \\
&= \tfrac{4}{7}\int_0^1 (3x^3+3x^2+x)dx \\
&= \tfrac{9}{7}
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Exercício 4

a). *Tome* $u=\sqrt{x}$ *e observe que*

$$du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \Leftrightarrow 2udu = dx$$

Assim

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} &= \int \frac{2udu}{u(1+u^2)} \\
&= 2\int \frac{du}{(1+u^2)} \\
&= 2\text{arctg } u + k \\
&= 2\text{arctg } \sqrt{x} + k
\end{aligned}
$$

onde $k \in \mathbb{R}$. $\square$

b). *Usando integração por partes, considere*

$$\begin{cases} u = \text{arcsen } x \\ dv = dx \end{cases}$$

e observe que

$$\begin{cases} du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ v = x \end{cases}$$

Assim, temos que

$$\int \text{arcsen } xdx = x\text{arcsen } x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Usando agora integração por substituição, considere $z = 1-x^2$ *e observe que* $dz = -2xdx$. *Assim temos que*

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x}{1-x^2}dx &= -\int \frac{dz}{2\sqrt{z}} \\
&= -\sqrt{z}+k \\
&= -\sqrt{1-x^2}+k, k\in\mathbb{R}
\end{aligned}
$$

E, finalmente temos,

$$
\begin{aligned}
\int \text{arcsen } xdx &= x\text{arcsen } x - \int \tfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \\
&= x\text{arcsen } x + \sqrt{1-x^2}+k
\end{aligned}
$$

onde $k \in \mathbb{R}$. $\blacksquare$

Exercício 5 *Calculando a intersecção entre as curvas dadas teremos*

$$\begin{cases} y^2 = x \\ y \ = x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x=1 \text{ e } y=-1 \\ ou \\ x=4 \text{ e } y=2 \end{array}$$

Usando integração em relação a variável y *temos a área da região procurada dada por*

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^2 \left(y+2-y^2\right)dy &= \frac{1}{2}y^2+2y-\frac{1}{3}y^3\Big|_{-1}^2 \\
&= \frac{10}{3}-\left(-\frac{7}{6}\right) \\
&= \frac{20+7}{6} \\
&= \frac{9}{2}
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^{o}. Edson

3ª Prova	**1º Semestre**	**2008**
Data: 16 de Junho de 2008		**Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Calcule a área da parte do parabolóide elíptico* $z = x^2 + 2y^2$ *que se encontra dentro do cilindro* $4x^2 + 16y^2 \leq 1$.

Problema 2 *Sejam* $f(x, y, z) = x$ *e* σ *a parte da superfície* $z^2 = x^2 + y^2$ *situada entre os planos* $z = 1$ *e* $z = 3$. *Calcule*

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) dS$$

Problema 3 *Calcule o centro de massa da superfície* σ *de densidade constante onde* σ *é a parte da superfície* $z^2 = x^2 + y^2$ *compreendida entre os planos* $z = 1$ *e* $z = 2$.

Problema 4 *Calcule* $\displaystyle\iint_{\sigma} \vec{u} \cdot \vec{n} dS$ *onde* σ *é a fronteira de* B *com normal exterior* $\vec{n}$, *sendo*

$$B = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \right\} \text{ e } \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z^2\vec{k}$$

Problema 5 *Sejam* $F(x, y, z) = -y^2\vec{i} + x^2\vec{j} + z^2\vec{k}$, σ *a superfície* $x^2 + \frac{1}{4}y^2 + z^2 = 2$, $z \geq 1$, *sendo* $\vec{n}$ *a normal que aponta para cima. Usando o* teorema de Stokes, *transforme a integral* $\displaystyle\iint_{\sigma} \left(\text{rot } \vec{F}\right) \cdot \vec{n} dS$ *numa integral de linha e calcule-a.*

Boa sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^o. Edson

1^o Semestre

Gabarito 3ª Prova **2008**
Data: 13 de Novembro de 2012 **Turma 31**

Exercício 1 *Uma parametrização possível para a superfície em questão, pode ser dada da seguinte forma:*

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + 2v^2 \end{cases} \text{ , onde } 4u^2 + 16v^2 \leq 1$$

Segue-se disto, que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) = (1,0,2u)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) = (0,1,4v)$$

e

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) = (-2u,-4v,1)$$

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) \right\| = \sqrt{4u^2 + 16v^2 + 1}$$

Porntanto, a área da superfície em questão, é

$$\begin{aligned} A &= \iint_{\sigma} ds \\ &= \iint_{\Omega} \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) \right\| du\, dv \\ &= \iint_{\Omega} \sqrt{4u^2 + 16v^2 + 1} du\, dv \end{aligned}$$

onde

$$\Omega = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \middle| 4u^2 + 16v^2 \leq 1 \right\}$$

Recorrendo a uma mudança de variáveis, considere

$$\begin{cases} 2u = r\cos\theta \\ \\ 4v = r\sin\theta \end{cases}$$

onde

$$|J| = \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(r,\theta)} \right| = \frac{1}{8} r$$

e, sob esta mudança, o conjunto Ω, é transformado no conjunto

$$\Omega' : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} A &= \iint_{\Omega} \sqrt{4u^2 + 16v^2 + 1} du\, dv \\ &= \iint_{\Omega'} \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta + 1} \frac{1}{8} r d\theta\, dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta + 1} \frac{1}{8} r d\theta\, dr \\ &= \frac{\pi}{12} \left(2\sqrt{2} - 1 \right) \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *De modo análogo ao que foi no problema anterior, uma parametrização para a superfície σ é dada por*

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{u^2 + v^2} \end{cases} \text{ , com } 1 \leq u^2 + v^2 \leq 9$$

e, portanto, segue-se que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) = \left(1, 0, \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} \right)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) = \left(0, 1, \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} \right)$$

e

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) = \left(\frac{-u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \frac{-v}{\sqrt{u^2+v^2}}, 1 \right)$$

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) \right\| = \sqrt{2}$$

Logo,

$$\iint_\sigma f(x,y,z)ds = \iint_\sigma x ds$$

$$= \iint_\Omega u \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) \right\| du\,dv$$

$$= \sqrt{2}\iint_\Omega u\,du\,dv$$

onde

$$\Omega = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, 1 \leq u^2 + v^2 \leq 9 \right\}$$

Usando coordenadas polares, ou seja

$$\begin{cases} u = r\cos\theta \\ v = r\sin\theta \end{cases}$$

onde

$$|J| = \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(r,\theta)} \right| = r$$

o conjunto Ω*, é transformado no conjunto*

$$\Omega' : \begin{cases} 1 \leq r \leq 3 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

e disto, segue-se que

$$\iint_\sigma f(x,y,z)ds = \sqrt{2}\iint_\Omega u\,du\,dv$$

$$= \sqrt{2}\iint_{\Omega'} r\cos\theta\, r d\theta\, dr$$

$$= \sqrt{2}\int_1^3 \int_0^{2\pi} r^2 \cos\theta\, d\theta\, dr$$

$$= 0$$

■

Exercício 3 *Uma parametrização para a superfície em questão é dada por*

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{u^2+v^2} \end{cases} , \text{ com } 1 \leq u^2 + v^2 \leq 4$$

Assim, segue-se que

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) \right\| = \sqrt{2}$$

e, sendo constante a densidade desta superfície, segue-se que sua massa é,

$$M = \iint_\sigma \delta ds$$

$$= \iint_\sigma k ds$$

$$= k\iint_\sigma ds$$

$$= k\iint_\Omega \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) \right\| du\,dv$$

$$= k\sqrt{2}\iint_\Omega du\,dv$$

$$= k\sqrt{2} \cdot \acute{A}rea(\Omega)$$

onde

$$\Omega = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, 1 \leq u^2 + v^2 \leq 4 \right\}$$

Ou seja,

$$M = 3k\pi\sqrt{2}$$

Agora, continuando com o centro de massa, temos

$$x_c = \frac{\iint_\sigma x\delta ds}{M}$$

$$= \frac{k\iint_\sigma x ds}{M}$$

$$= 0$$

$$y_c = \frac{\iint_\sigma y\delta ds}{M}$$

$$= \frac{k\iint_\sigma y ds}{M}$$

$$= 0$$

$$z_c = \frac{\iint_\sigma z\delta ds}{M}$$

$$= \frac{k}{M}\iint_\sigma z ds$$

$$= \frac{k}{3k\pi\sqrt{2}}\iint_\Omega \sqrt{u^2+v^2}\left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right\| du\, dv$$

$$= \frac{k\sqrt{2}}{3k\pi\sqrt{2}}\iint_\Omega \sqrt{u^2+v^2} du\, dv$$

$$= \frac{1}{3\pi}\iint_\Omega \sqrt{u^2+v^2} du\, dv$$

$$= \frac{1}{3\pi}\int_1^2\int_0^{2\pi} r^2 d\theta\, dr$$

$$= \frac{14}{9}$$

Portanto, o centro de massa da superfície dada é

$$C = \left(0, 0, \frac{14}{9}\right)$$

■

Exercício 4 *A integral dada no problema corresponde, na verdade, ao cálculo do fluxo do campo vetorial $\vec{u}$ através da superfície σ na direção de $\vec{n}$. Usando o* ***teorema da divergência de Gauss****, segue-se que*

$$\iint_\sigma \vec{u}\cdot\vec{n}\, ds = \iiint_B \operatorname{div}\vec{u}\, dx\, dy\, dz$$

$$= \iiint_B (2+2z) dx\, dy\, dz$$

Usando coordenadas esféricas, ou seja

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

onde

$$|J| = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)}\right| = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi,$$

o conjunto ***B*** *é transformado no conjunto*

$$B' : \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le \rho \le 1 \end{cases}$$

e, segue-se disto que

$$\iint_\sigma \vec{u}\cdot\vec{n}\, ds = \iiint_B (2+2z) dx\, dy\, dz$$

$$= \int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi} (2+2\rho\cos\varphi)\rho^2 \operatorname{sen}\varphi\, d\theta\, d\varphi\, d\rho$$

$$= \frac{8}{3}\pi$$

■

Exercício 5 *Observe que a fronteira da superfície dada corresponde à interseção da superfície*

$$x^2 + \frac{1}{4}y^2 + z^2 = 2$$

com o plano

$$z = 1$$

ou seja

$$x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$$

que pode ser parametrizada da seguinte maneira

$$\Gamma : \begin{cases} x = \cos t \\ y = 2\operatorname{sen} t \quad , 0 \le t \le 2\pi \\ z = 1 \end{cases}$$

Assim, usando o ***teorema de Stokes****, teremos que*

$$\iint_\sigma (\operatorname{rot}\mathbf{F})\cdot\vec{n}\, ds = \int_\Gamma \mathbf{F}\cdot dr$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\Gamma(t))\cdot\Gamma'(t) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\cos t, 2\operatorname{sen} t, 1)\cdot(-\operatorname{sen} t, 2\cos t, 0) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(4\operatorname{sen}^3 t + 2\cos^3 t\right) dt$$

$$= 0$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof$^{\text{o}}$. Edson

Prova Final **1$^{\text{o}}$ Semestre** **2008**

Data: 30 de Junho de 2008 **Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Determine o volume do sólido que está acima do cone* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ *e abaixo da esfera de raio unitário e centro na origem.*

Problema 2 *Calcule*

$$\iiint_B e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dxdydz$$

onde B *é parte da esfera* $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ *que se encontra no primeiro octante.*

Problema 3 *Sejam* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *e* $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *campos escalares tais que suas derivadas parciais existem e são contínuas. Mostre que*

$$\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$$

Problema 4 *Calcule a área da superfície da esfera* $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ *que está dentro do cilindro* $x^2 + y^2 = ax$ *onde* $a \in \mathbb{R}$ *é fixo.*

Problema 5 *Usando o Teorema de Stokes, calcule* $\int_\Gamma \tilde{\mathbf{F}} \cdot d\Gamma$ *onde*

$$\tilde{\mathbf{F}}(x, y, z) = yz\tilde{\mathbf{i}} + 2xz\tilde{\mathbf{j}} + e^{xy}\tilde{\mathbf{k}}$$

e Γ *é a circunferência* $x^2 + y^2 = 16$ *e* $z = 5$ *orientada no sentido anti-horário.*

Boa sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof$^{\text{o}}$. Edson

1$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito Prova Final **2008**
Data: Julho **Turma 31**

Exercício 1 *Inicialmente, calculemos a intersecção entre o cone e a esfera. Isto nos dará uma idéia do que será o nosso domínio de integração:*

$$\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, obtemos como solução o conjunto

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}, (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Assim, o volume V do sólido dado será

$$V = \iint_K \left(\sqrt{1 - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2}\right) dxdy$$

onde

$$K = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle|\, x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2} \right\}$$

Usando coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r\cos\,\theta \\ y = r\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

o conjunto K pode ser reescrito da seguinte forma

$$K : \begin{cases} 0 \leq r \leq \sqrt{\frac{1}{2}} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Então

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{1 - r^2} - r\right) r d\theta\; dr \\ &= \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \left(\sqrt{1 - r^2} - r\right) r\theta\Big|_0^{2\pi} dr \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \left(\sqrt{1 - r^2} - r\right) rdr \\ &= -\tfrac{2\pi}{3} \left(\sqrt{(1 - r^2)^3} + r^3\right)\Big|_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \\ &= -\tfrac{2\pi}{3} \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2} - 1\right) \\ &= -\tfrac{\pi}{3} \left(\sqrt{2} - 2\right) \\ &= \tfrac{\pi}{3} \left(2 - \sqrt{2}\right) \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Pelo enunciado do problema temos que o conjunto B é dado por*

$$B = \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 \\ x \geq 0, y \geq 0, y \geq 0 \\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

Usando coordenadas esféricas

$$\begin{cases} x = \rho\text{ sen }\theta\text{ sen }\varphi \\ y = \rho\text{ cos }\theta\text{ sen }\varphi \\ z = \rho\text{ cos }\varphi \end{cases}$$

O conjunto B pode ser reescrito da seguinte maneira

$$B = \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 3 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Considerando

$$A = \iiint_B e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dxdydz$$

De modo que,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^\rho \rho^2 \text{sen } \varphi \, d\varphi \, d\theta \, d\rho \\ &= -\int_0^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^\rho \rho^2 \cos \, \varphi\big|_0^{\frac{\pi}{2}} \, d\theta \, d\rho \\ &= \int_0^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^\rho \rho^2 d\theta \, d\rho \\ &= \int_0^3 e^\rho \rho^2 \theta\big|_0^{\frac{\pi}{2}} \, d\rho \\ &= \tfrac{\pi}{2} \int_0^3 e^\rho \rho^2 d\rho \\ &= \tfrac{\pi}{2} e^\rho \left(\rho^2 - 2\rho + 2\right)\big|_0^3 \\ &= \tfrac{\pi}{2}(5e^3 - 2) \end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Sendo* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *e* $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$*, temos que*

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$$

$$\nabla g = (g_x, g_y, g_z)$$

onde, estamos supondo que f *e* g *são funções das variáveis* x, y *e* z*. Donde segue-se que*

$$\begin{aligned} \nabla f \times \nabla g &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \end{vmatrix} \\ &= (f_y g_z - f_z g_y, f_z g_x - f_x g_z, f_x g_y - f_y g_x) \end{aligned}$$

Portanto

$$\text{div}(\nabla f \times \nabla g) = p_x + q_y + m_z$$

onde

$$p = f_y g_z - f_z g_y$$

$$q = f_z g_x - f_x g_z$$

$$m = f_x g_y - f_y g_x$$

Observe que

$$p_x = f_{xy} g_z + f_y g_{xz} - f_{xz} g_y - f_z g_{xy}$$

$$q_y = f_{yz} g_x + f_z g_{xy} - f_{xy} g_z - f_x g_{yz}$$

$$m_z = f_{xz} g_y + f_x g_{yz} - f_{yz} g_x - f_y g_{xz}$$

Logo

$$\text{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$$

■

Exercício 4 *A porção de superfíce descrita no problema pode ser representada da seguinte forma*

$$B = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \, x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \text{ com } (x, y) \in K \right\}$$

onde

$$K = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, x^2 + y^2 \leq ax \right\}$$

Dada a simetria da esfera, o conjunto B *é composto por duas partes iguais, de modo que a área que desejamos calcular será o dobro da área de uma delas. A parte superior da região* B *pode ser parametrizada da seguinte maneira:*

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{a^2 - u^2 - v^2} \end{cases} , (u, v) \in K$$

Portanto,

$$\begin{aligned} A_B &= 2 \iint_\sigma dS \\ &= 2 \iint_K \left\| \tfrac{\partial \sigma}{\partial u} \times \tfrac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| dudv \end{aligned}$$

onde

$$\tfrac{\partial \sigma}{\partial u} = \left(1, 0, \frac{-u}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}}\right)$$

$$\tfrac{\partial \sigma}{\partial v} = \left(1, 0, \frac{-v}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}}\right)$$

e

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial \sigma}{\partial u} \times \tfrac{\partial \sigma}{\partial v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{-u}{\sqrt{a^2-u^2-v^2}} \\ 0 & 1 & \frac{-v}{\sqrt{a^2-u^2-v^2}} \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{u}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}}, \frac{v}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}}, 1 \right) \end{aligned}$$

com

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| = \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - u^2 - v^2}}$$

Então

$$A_B = 2 \iint_K \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - u^2 - v^2}} dudv$$

Usando coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r\cos\,\theta \\ y = r\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

o conjunto K *pode ser reescrito da seguinte forma*

$$K : \begin{cases} 0 \le r \le a\cos\,\theta \\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

De modo que

$$A_B = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\cos\,\theta}\sqrt{\frac{a^2}{a^2 - r^2}}\,r dr d\theta$$

Para resolvermos esta integral faremos uma mudança de variável. Tome

$$w = a^2 - r^2$$

e observe que

$$dw = -2rdr$$

e

$$r = 0 \Rightarrow w = a^2$$

$$r = a\cos\,\theta \Rightarrow w = a^2(1 - \cos^2\theta)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
A_B &= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{a^2}^{a^2(1-\cos^2\theta)}\sqrt{\tfrac{a^2}{w}}\,dwd\theta \\
&= -a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{a^2}^{a^2(1-\cos^2\theta)}\tfrac{1}{\sqrt{w}}\,dwd\theta \\
&= -2a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{w}\Big|_{a^2}^{a^2(1-\cos^2\theta)}\,d\theta \\
&= -2a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{1-\cos^2\theta} - 1\right)d\theta \\
&= -2a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(|\text{sen}\,\theta| - 1\right)d\theta \\
&= -2a^2\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\text{sen}\,\theta|\,d\theta - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\right) \\
&= -2a^2\left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\text{sen}\,\theta\;d\theta - \pi\right) \\
&= -2a^2\left(-2\,\cos\,\theta|_0^{\frac{\pi}{2}} - \pi\right) \\
&= 2a^2\,(\pi - 2)
\end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Considere a seguinte superfície*

$$\sigma : \begin{cases} x = r\cos\,\theta \\ y = r\text{sen}\,\theta \\ z = 5 \end{cases}$$

onde

$$K : \begin{cases} 0 \le r \le 4 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

Observe que a fronteira da superfície σ *é a circunferência*

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ z = 5 \end{cases}$$

Assim, usando o Teorema de Stokes, temos que

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma F\cdot d\Gamma &= \iint_\sigma \text{rot}\;F\cdot\mathbf{n}dS \\
&= \iint_K \text{rot}\;F\cdot\left(\tfrac{\partial\sigma}{\partial r}\times\tfrac{\partial\sigma}{\partial\theta}\right)drd\theta
\end{aligned}$$

Onde

$$\frac{\partial\sigma}{\partial r}\times\frac{\partial\sigma}{\partial\theta} = (0, 0, r)$$

e

$$\begin{aligned}
\text{rot}\;F &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & 2xz & e^{xy} \end{vmatrix} \\
&= (xe^{xy} - 2x)\vec{i} - (ye^{xy} - y)\vec{j} + (2z - z)\vec{k} \\
&= (xe^{xy} - 2x, ye^{xy} - y, z)
\end{aligned}$$

E, finalmente temos,

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma F\cdot d\Gamma &= \iint_K \text{rot}\;F\cdot\left(\tfrac{\partial\sigma}{\partial r}\times\tfrac{\partial\sigma}{\partial\theta}\right)drd\theta \\
&= \iint_K r\mathbf{z}drd\theta \\
&= \int_0^4\int_0^{2\pi}5rd\theta dr \\
&= 10\pi\int_0^4 rdr \\
&\quad 5\pi r^2\big|_0^4 \\
&= 80\pi
\end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^{o}. Edson

1ª Prova **1º Semestre** **2009**

Data: 30 de Março **Duração: 18:00 - 20:00**

Problema 1 *Calcule*

$$\iint\limits_A \frac{1}{(x+y)^2}dxdy$$

onde A *é o retângulo* $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$.

Problema 2 *Inverta a ordem de integração da seguinte integral dupla*

$$\int_1^e \int_{\ln x}^x f(x,y)dydx$$

onde f *é uma função integrável no domínio dado.*

Problema 3 *Calcule*

$$\iint_B \sqrt[3]{y^2-x^2}dxdy$$

onde B *é o paralelogramo de vértices* $(0,0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (0,1), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Problema 4 *Calcule o volume do conjunto*

$$x^2+y^2 \leq z \leq 1-x^2$$

Problema 5 *Seja* B *o conjunto de todos os* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *tais que* $1 \leq x^2+y^2 \leq 4, y \geq 0, x \geq 0$, *cuja densidade é o produto das coordenadas no ponto. Calcule o centro de massa de* B.

Boa sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^{o}. Edson

1^{o} Semestre

Gabarito 1ª Prova **2009**
Data: Domingo, 05 de Abril **Turma E3**

Exercício 1 *Sendo*

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, 0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 1 \right\}$$

Usando o Teorema de Fubini, temos que

$$\iint_A \frac{1}{(x+y)^2} dxdy = \int_0^1 \int_0^2 \frac{1}{(x+y)^2} dxdy$$

Fazendo uma mudança de variáveis na integral interna, tome $u = x + y$ e observe que

$$du = dx$$

e,

$$x = 0 \Rightarrow u = y$$

$$x = 2 \Rightarrow u = y + 2$$

de modo que,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^2 \frac{1}{(x+y)^2} dxdy &= \int_0^1 \int_y^{y+2} \frac{1}{u^2} dudy \\
&= \int_0^1 -\frac{1}{u}\Big|_y^{y+2} dy \\
&= \int_0^1 \frac{1}{y} dy - \int_0^1 \frac{1}{y+2} dy \\
&= \int_0^1 \frac{1}{y} dy - \ln|y+2|\big|_0^1 \\
&= \int_0^1 \frac{1}{y} dy + \ln\tfrac{2}{3}
\end{aligned}$$

Observe que a integral

$$\int_0^1 \frac{1}{y} dy$$

é uma integral imprópria, onde

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{y} dy &= \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{y} dy \\
&= \lim_{a\to 0^+} \ln|y|\big|_a^1 \\
&= \lim_{a\to 0^+} \ln 1 - \ln a \\
&= \lim_{a\to 0^+} -\ln a \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}
\iint_A \frac{1}{(x+y)^2} dxdy &= \int_0^1 \int_0^2 \frac{1}{(x+y)^2} dxdy \\
&= \int_0^1 \frac{1}{y} dy + \ln\tfrac{2}{3} \\
&= +\infty + \ln\tfrac{2}{3} \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

■

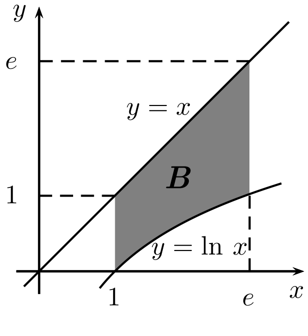
Exercício 2 *Dada a integral*

$$\int_1^e \int_{\ln x}^x f(x,y) dydx$$

temos que o domínio de integração é o conjunto

$$B : \begin{cases} 1 \leq x \leq e \\ \ln x \leq y \leq x \end{cases}$$

Cujo gráfico é



O conjunto B pode ser escrito como

$$B = B_1 \cup B_2$$

onde

$$B_1 : \begin{cases} 1 \leq x \leq e^y \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

e

$$B_2 : \begin{cases} y \leq x \leq e \\ 1 \leq y \leq e \end{cases}$$

De modo que

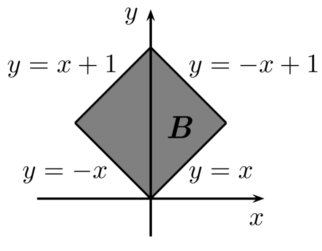
$$\begin{aligned} \int_1^e \int_{\ln\, x}^x f(x,y)dydx &= \iint_B f(x,y)dxdy \\ &= \iint_{B_1} f(x,y)dxdy + \\ &\quad + \iint_{B_2} f(x,y)dxdy \\ &= \int_0^1 \int_1^{e^y} f(x,y)dxdy + \\ &\quad + \int_1^e \int_y^e f(x,y)dxdy \end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Observe que*

$$\iint_B \sqrt[3]{y^2 - x^2}dxdy = \iint_B \sqrt[3]{(y-x)(y+x)}dxdy$$

e o conjunto B possui a seguinte representação gráfica



Fazendo a mudança de variáveis

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = -x + y \end{cases}$$

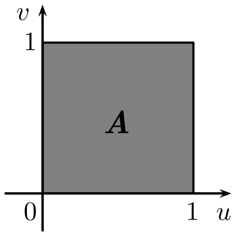
teremos

$$\begin{cases} x = \dfrac{u-v}{2} \\ u = \dfrac{u+v}{2} \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left| \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{2}$$

e, neste novo sistema de variáveis o conjunto B será transformado no conjunto A que possui o seguinte gráfico



Ou seja

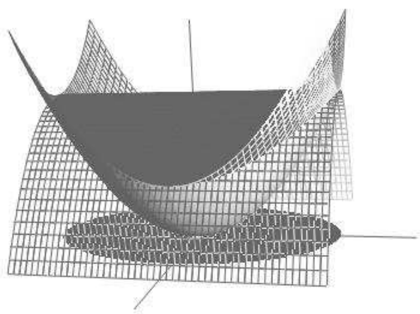
$$\begin{aligned} \iint_B \sqrt[3]{y^2 - x^2}dxdy &= \iint_A \frac{1}{2} \sqrt[3]{uv}dudv \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \sqrt[3]{u}\sqrt[3]{v}dudv \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{3}{4} \sqrt[3]{v}\sqrt[3]{u^4} \Big|_0^1 dv \\ &= \frac{1}{2}\frac{3}{4} \int_0^1 \sqrt[3]{v}dv \\ &= \frac{9}{32} \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Pelo que foi enunciado no problema, o conjunto dado pode ser descrito como*

$$B = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \big| \, x^2 + y^2 \leq z \leq 1 - x^2 \}$$

Esboçando asdasdasdasdasda um gráfico teremos a seguinte figura



O volume do conjunto B é dado pela seguinte integral tripla

$$V = \iiint_B dxdydz = \iint_K \left[\int_{x^2+y^2}^{1-x^2} dz \right] dxdy$$

onde o conjunto K é o domínio de integração das variáveis x e y. Tal conjunto pode ser encontrado calculando-se a intersecção superfícies $z = x^2 + y^2$ e $z = 1 - x^2$. Calculando esta intersecção obtemos

$$K = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \big| \, 2x^2 + y^2 = 1\}$$

Usando coordenadas polares, o conjunto K pode ser reparametrizado da seguinte forma

$$K : \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} r\cos\,\theta \\ \\ y = r\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

onde

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq r \leq 1$$

e

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right| = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

Donde segue-se que

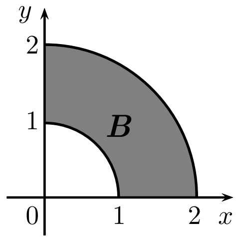
$$\begin{aligned} V &= \iint_K \left[\int_{x^2+y^2}^{1-x^2} dz \right] dxdy \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{\frac{r^2}{2}\cos^2\theta + r^2 sen^2\theta}^{1-\frac{r^2}{2}\cos^2\theta} \frac{r}{\sqrt{2}} dz d\theta dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(1 - r^2\cos^2\theta - r^2\text{sen}^2\theta\right) \frac{r}{\sqrt{2}} d\theta dr \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(r - r^3\right) d\theta dr \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \left(r - r^3\right) \theta\Big|_0^{2\pi} dr \\ &= \tfrac{2\pi}{\sqrt{2}} \int_0^1 \left(r - r^3\right) dr \\ &= \tfrac{2\pi}{\sqrt{2}} \left(\tfrac{1}{2}r^2 - \tfrac{1}{4}r^4\right)\Big|_0^1 \\ &= \tfrac{\pi}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Pelo exposto no problema, temos que*

$$B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \big| \, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$$

cujo gráfico é



Também é dado que a densidade do conjunto B no ponto (x, y) é

$$\delta(x, y) = xy$$

Assim, a massa do conjunto B será:

$$\begin{aligned} M &= \iint_B \delta(x,y) dxdy \\ &= \iint_B xydxdy \end{aligned}$$

Usando coordenadas polares, o conjunto B pode ser reparametrizado da seguinte forma

$$B : \begin{cases} x = r\cos\,\theta \\ \\ y = r\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

com

$$0 \leq \theta \leq \tfrac{\pi}{2}$$

$$1 \leq r \leq 2$$

e

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right| = r$$

Ou seja

$$\begin{aligned} M &= \iint_B xydxdy \\ &= \int_1^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\text{sen}\,\theta\cos\,\theta r d\theta dr \\ &= \int_1^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3\text{sen}\,\theta\cos\,\theta d\theta dr \\ &= \int_1^2 \frac{1}{2} r^3\text{sen}^2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dr \\ &= \int_1^2 \frac{1}{2} r^3 dr \\ &= \frac{1}{8} r^4 \Big|_1^2 \\ &= \frac{15}{8} \end{aligned}$$

Do mesmo modo, calculando o centro de massa (x_c, y_c) *teremos*

$$
\begin{aligned}
x_c &= \frac{1}{M}\iint_B x\delta(x,y)dxdy \\
&= \frac{8}{15}\iint_B x^2 y dxdy \\
&= \frac{8}{15}\int_1^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\text{sen}^2\theta r\cos\theta r d\theta dr \\
&= \frac{8}{15}\int_1^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^4\text{sen}^2\theta\cos\theta d\theta dr \\
&= \frac{8}{15}\int_1^2 \left.\frac{1}{3}r^4\text{sen}^3\theta\right|_0^{\frac{\pi}{2}} dr \\
&= \int_1^2\frac{1}{3}r^4 dr \\
&= \frac{8}{15}\left.\frac{1}{15}r^5\right|_1^2 \\
&= \frac{248}{225}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
y_c &= \frac{1}{M}\iint_B y\delta(x,y)dxdy \\
&= \frac{8}{15}\iint_B xy^2 dxdy \\
&= \frac{8}{15}\int_1^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\text{sen}\,\theta r^2\cos^2\theta r d\theta dr \\
&= \frac{8}{15}\int_1^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^4\text{sen}\,\theta\cos^2\theta d\theta dr \\
&= \frac{8}{15}\int_1^2 \left.\frac{-1}{3}r^4\cos^3\theta\right|_0^{\frac{\pi}{2}} dr \\
&= \frac{8}{15}\int_1^2\frac{1}{3}r^4 dr \\
&= \frac{8}{15}\left.\frac{1}{15}r^5\right|_1^2 \\
&= \frac{248}{225}
\end{aligned}
$$

Então, o centro de massa do conjunto B é o ponto $\left(\frac{248}{225}, \frac{248}{225}\right)$ ■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof$^{\text{o}}$. Edson

2ª Prova | **1º Semestre** | **2009**

Data: 06 de Maio | **Duração: 18:00 - 20:00**

Problema 1 *Calcule a integral tripla*

$$\iiint_B z\,dx\,dy\,dz$$

onde B é a região que está entre as esferas $x^2+y^2+z^2=1$ e $x^2+y^2+z^2=4$ no primeiro octante.

Problema 2 *Calcule o volume do sólido limitado pelo cilindro $x^2+y^2=9$ e os planos $y+z=5$ e $z=1$.*

Problema 3 *Calcule o trabalho realizado pela força*

$$F(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{i}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{j}$$

ao mover uma partícula ao longo da curva $y=1+x^2$ do ponto $(-1,2)$ ao ponto $(1,2)$.

Problema 4 *Calcule a integral de linha*

$$\int_\gamma xy^4\,ds$$

onde γ é a metade direita do círculo $x^2+y^2=16$.

Problema 5 *Calcule a integral*

$$\int_\gamma (1-ye^{-x})dx+e^{-x}dy$$

onde γ é qualquer caminho de $(0,1)$ a $(1,2)$.

Boa sorte!

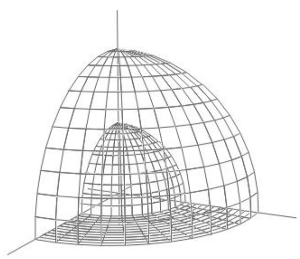
Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^o. Edson

1^o Semestre

Gabarito 2ª Prova **2009**
Data: Quinta-feira, 28 de Maio **Turma E3**

Exercício 1 *Sendo B a região do espaço delimitada pelas esferas $x^2+y^2+z^2=1$ e $x^2+y^2+z^2=4$ no primeiro octante, teremos o seguinte esboço da mesma*



Usando coordenadas esféricas, ou seja, tomando

$$\begin{cases} x = r\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

o conjunto B torna-se

$$B : \begin{cases} 1 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

e, o jacobiano desta mudança de variáveis é

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}\right| = r^2\mathrm{sen}\,\varphi$$

Donde segue-se que

$$\begin{aligned}
\iiint_B z\,dxdydz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2 r\cos\varphi r^2\mathrm{sen}\,\varphi\,drd\theta d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2 r^3\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi\,drd\theta d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^4}{4}\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi\Big|_1^2 d\theta d\varphi \\
&= \frac{15}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi\,d\theta d\varphi \\
&= \frac{15}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \\
&= \frac{15\pi}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi\,d\varphi
\end{aligned}$$

Tomando

$$u = \mathrm{sen}\,\varphi$$

e observando que

$$du = \cos\varphi d\varphi$$

$$\varphi = 0 \Rightarrow u = 0$$

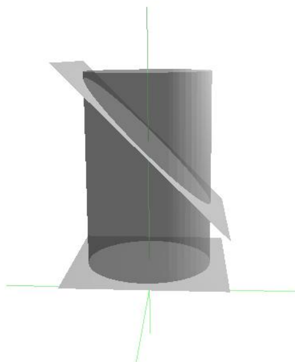
$$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 1$$

Segue-se que

$$\begin{aligned}
\iiint_B z\,dxdydz &= \frac{15\pi}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi\,d\varphi \\
&= \frac{15\pi}{8}\int_0^1 u\,du \\
&= \frac{15\pi}{8}\,\frac{u^2}{2}\Big|_0^1 \\
&= \frac{15\pi}{16}
\end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Fazendo um esboço do sólido em questão, obtemos*



Assim, usando coordenadas cilíndricas,

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$$

cujo jacobiano é dado por

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| = r$$

o sólido torna-se

$$B: \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le 3 \\ 1 \le z \le 5 - r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

Portanto, seu volume será

$$\begin{aligned} V &= \iiint_B dxdydz \\ &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_1^{5 - r\,\mathrm{sen}\,\theta} r dz d\theta dr \\ &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} rz\Big|_1^{5-r\,\mathrm{sen}\,\theta} d\theta dr \\ &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} r(4 - r\,\mathrm{sen}\,\theta) d\theta dr \\ &= \int_0^3 r(4\theta + r\cos\theta)\Big|_0^{2\pi} dr \\ &= \int_0^3 8\pi r dr \\ &= 8\pi \frac{r^2}{2}\Big|_0^3 \\ &= 36\pi \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Exercício 3 *Considere*

$$P(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$Q(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Observe que

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= \frac{-y\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)2x}{x^2+y^2} \\ &= \frac{-2xy}{2\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)(x^2+y^2)} \\ &= \frac{-xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) &= \frac{-x\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)2y}{x^2+y^2}\\ &= \frac{-2xy}{2\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)(x^2+y^2)}\\ &= \frac{-xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y), \forall (x,y) \neq (0,0)$$

Assim, considerando

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle|\, y > 0 \right\},$$

como Ω é simplesmente conexo (não tem "buracos") e $(0,0) \notin \Omega$, podemos afirmar que o campo vetorial

$$F(x,y) = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$$

é conservativo em Ω. Portanto, o trabalho realizado por F para deslocar uma partícula do ponto $(-1,2)$ ao ponto $(1,2)$ é independente do caminho escolhido. Sendo assim, tomemos γ sendo o segmento de reta que une os pontos $(-1,2)$ e $(1,2)$, ou seja

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 2 \end{cases}, -1 \leq t \leq 1$$

Com isto, chamando de τ o trabalho que desejamos calcular, teremos que

$$\begin{aligned}\tau &= \int_\gamma F \cdot d\gamma\\ &= \int_{-1}^{1} F(\gamma(t)) \cdot (1,0)dt\\ &= \int_{-1}^{1} \left(\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}, \frac{2}{\sqrt{t^2+4}}\right) \cdot (1,0)dt\\ &= \int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{t^2+4}}dt\end{aligned}$$

Para resolver esta última integral, tome

$$u = t^2 + 4$$

e observe que

$$\begin{aligned}&du = 2tdt\\ &t = -1 \Rightarrow u = 5\\ &t = 1 \Rightarrow u = 5\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\tau &= \int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{t^2+4}}dt\\ &= \int_{5}^{5} \frac{du}{2\sqrt{u}}\\ &= 0\end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Sendo γ a metade direita do círculo*

$$x^2 + y^2 = 16,$$

podemos parametrizar a curva γ da seguinte forma

$$\begin{cases} x(t) = 4\cos t \\ y(t) = 4\operatorname{sen} t \end{cases}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

De onde segue-se que

$$\begin{aligned}ds &= \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt\\ &= \sqrt{16\cos^2 t + 16\operatorname{sen}^2 t}dt\\ &= 4dt\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_\gamma xy^4 ds &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos t(4\operatorname{sen} t)^4 4dt\\ &= 4^6 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \operatorname{sen}^4 t dt\end{aligned}$$

Tome

$$u = \operatorname{sen} t$$

e observe que

$$\begin{aligned}&du = \cos t\, dt\\ &t = -\tfrac{\pi}{2} \Rightarrow u = -1\\ &t = \tfrac{\pi}{2} \Rightarrow u = 1\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}\int_\gamma xy^4 ds &= 4^6 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \operatorname{sen}^4 t dt\\ &= 4^6 \int_{-1}^{1} u^4 du\\ &= \frac{4^6}{5} u^5 \Big|_{-1}^{1}\\ &= \frac{2 \cdot 4^6}{5}\end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Considere o caminho*

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$$

onde

$$\gamma_1 : \begin{cases} x(t) = t \\ \\ y(t) = 1 \end{cases}, 0 \leq t \leq 1$$

e

$$\gamma_2 : \begin{cases} x(t) = 1 \\ \\ y(t) = t \end{cases}, 1 \leq t \leq 2$$

Perceba que a curva γ_1 é o segmente de reta saindo do ponto $(0,1)$ para o ponto $(1,1)$ e a curva γ_2 é o segmento de reta saindo do ponto $(1,1)$ para o ponto $(1,2)$. Portanto γ é um curva que se inicia no ponto $(0,1)$ e termina no ponto $(1,2)$. Em consequência disto teremos que

$$\int_\gamma (1 - ye^{-x})dx + e^{-x}dy = A + B$$

onde

$$A = \int_{\gamma_1} (1 - ye^{-x})dx + e^{-x}dy$$

e

$$B = \int_{\gamma_2} (1 - ye^{-x})dx + e^{-x}dy$$

Calculando A e B teremos

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (1 - e^{-t})dt \\ &= (t + e^{-t})\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{e} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} B &= \int_1^2 e^{-1}dt \\ &= e^{-1}t\Big|_1^2 \\ &= \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Logo

$$\int_\gamma (1 - ye^{-x})dx + e^{-x}dy = \frac{2}{e}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof$^{\text{o}}$. Edson

3ª Prova **1º Semestre** **2009**

Data: 08 de Junho **Duração: 18:00 - 20:00**

Problema 1 *Usando o* ***Teorema de Green****, calcule o trabalho realizado pelo campo de forças*

$$\mathbf{F}(x,y) = \sqrt{y}\mathbf{i} + \sqrt{x}\mathbf{j}$$

ao deslocar uma partícula, uma vez, ao longo da curva fechada, orientada no sentido anti-horário, dada pelas equações $y = 0, x = 2$ *e* $y = \frac{x^3}{4}$.

Problema 2 *Calcule a massa da porção do cone* $z = \sqrt{x^2+y^2}$ *que está entre os planos* $z = 1$ *e* $z = 4$*, sendo a densidade do mesmo dada por* $\delta(x,y,z) = x^2 z$.

Problema 3 *Calcule o fluxo do campo vetorial*

$$F(x,y,z) = e^{-y}\mathbf{i} - y\mathbf{j} + x \operatorname{sen} z\mathbf{k}$$

através da porção φ *do cilindro elíptico*

$$\varphi : \begin{cases} x(u,v) = 2\cos v \\ y(u,v) = \operatorname{sen} v \\ z(u,v) = u \end{cases} \quad \textit{onde} \quad \begin{array}{l} 0 \le u \le 5 \\ 0 \le v \le 2\pi \end{array}$$

orientada no sentido positivo.

Problema 4 *Usando o* ***Teorema da Divergência****, calcule o fluxo do campo vetorial*

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2+y)\mathbf{i} + xy\mathbf{j} - (2xz+y)\mathbf{k}$$

através da superfície do tetraedro limitado pelos planos coordenados e a porção do plano $x + y + z = 1$ *que se encontra no primeiro octante.*

Problema 5 *Usando o* ***Teorema de Stokes****, calcule*

$$\oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\Gamma$$

onde

$$\mathbf{F}(x,y,z) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + zx\mathbf{k}$$

e Γ *é o triângulo sobre o plano* $x + y + z = 1$ *de vértices* $(1,0,0), (0,1,0)$ *e* $(0,0,1)$ *com orientação anti-horária olhando do primeiro octante para a origem.*

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^{o}. Edson

1^{o} Semestre

Gabarito 3ª Prova **2009**
Data: Quinta-feira, 11 de Junho **Turma E3**

Exercício 1 *Chamemos de γ a curva dada no problema. Fazendo um esboço de γ vamos descobrir que o interior desta curva é o conjunto*

$$K = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \big| \, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \frac{x^3}{4} \}$$

Sabemos que o trabalho τ realizado pelo campo de forças

$$\mathbf{F}(x,y) = \sqrt{y}\mathbf{i} + \sqrt{x}\mathbf{j}$$

para deslocar uma partícula, uma vez, ao longo da curva γ no sentido anti-horário, é dado por

$$\tau = \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\gamma$$

*e o **Teorema de Green** nos garante que*

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\gamma = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

onde, estamos considerando

$$P(x,y) = \sqrt{y}$$

$$Q(x,y) = \sqrt{x}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\tau &= \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \\
&= \int_0^2 \int_0^{\frac{x^3}{4}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{y}} \right) dydx \\
&= \int_0^2 \left(\frac{y}{2\sqrt{x}} - \sqrt{y} \right) \Bigg|_0^{\frac{x^3}{4}} dydx \\
&= \int_0^2 \left(\tfrac{1}{8} x^{\frac{5}{2}} - \tfrac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} \right) dx \\
&= \left(\tfrac{1}{28} x^{\frac{7}{2}} - \tfrac{1}{5} x^{\frac{5}{2}} \right) \Bigg|_0^2 \\
&= -\tfrac{18}{35}\sqrt{2}
\end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Parametrizando a superfície dada no problema, obtemos*

$$\varphi : \begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = v \\ z(u,v) = \sqrt{u^2+v^2} \end{cases}$$

onde $(u,v) \in K$, com

$$K = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \big| \, 1 \leq u^2 + v^2 \leq 4 \right\}$$

Sabemos que a massa desta superfície é dada por

$$M = \iint_\varphi \delta dS$$

onde

$$\delta(x,y,z) = x^2 z$$

é a densidade da mesma. Para calcularmos esta massa, observemos antes que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) = \left(1, 0, \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} \right)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) = \left(0, 1, \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} \right)$$

donde segue-se que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) = \left(-\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, -\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}, 1 \right)$$

e

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) \right\| = \sqrt{2}$$

Agora, calculando a massa, teremos

$$\begin{aligned}
M &= \iint_\varphi \delta dS \\
&= \iint_K \delta(\varphi(u,v)) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) \right\| dudv \\
&= \iint_K \sqrt{2} \delta(u, v\sqrt{u^2+v^2}) dudv \\
&= \sqrt{2} \iint_K u^2 \sqrt{u^2+v^2} dudv
\end{aligned}$$

Usando coordenadas polares, ou seja

$$\begin{cases} u = r\cos\theta \\ v = r\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

e, neste sistema de coordenadas, o conjunto K torna-se

$$K : \begin{cases} 0 \le r \le 4 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

e o jacobiano desta mudança de variáveis é dado por

$$\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,\theta)}\right| = r$$

Portanto,

$$\begin{aligned} M &= \sqrt{2}\iint_K u^2\sqrt{u^2+v^2}dudv \\ &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_1^4 r^2\cos^2\theta r\cdot r\cdot drd\theta \\ &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_1^4 r^4\cos^2\theta drd\theta \\ &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \tfrac{r^5}{5}\cos^2\theta\Big|_1^4 d\theta \\ &= \sqrt{2}\cdot\frac{1023}{5}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta \\ &= \frac{1023\sqrt{2}\pi}{5} \end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Sabemos que o fluxo do campo vetorial*

$$\mathbf{F}(x,y,z) = e^{-y}\mathbf{i} - y\mathbf{j} + xsenz\mathbf{k}$$

através da superfície

$$\varphi : \begin{cases} x(u,v) = 2\cos v \\ y(u,v) = \mathrm{sen}\,v \\ z(u,v) = u \end{cases}$$

onde $(u,v) \in K$, com

$$K : \begin{cases} 0 \le u \le 5 \\ 0 \le v \le 2\pi \end{cases}$$

na direção do vetor normal $\mathbf{n}$, *é dado por*

$$\iint_\varphi \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$$

Para resolvermos esta integral de superfície, precisamos antes calcular:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v) = (0,0,1)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v) = (-2\mathrm{sen}\,v, \cos v, 0)$$

donde segue-se que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v) = (-\cos v, -2\mathrm{sen}\,v, 0)$$

Com isto, temos então, que

$$\iint_\varphi \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS = \iint_K \mathbf{F}(\varphi(u,v)).\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)dudv$$

$$\begin{aligned} &= \iint_K \mathbf{F}(2\cos v, \mathrm{sen}\,v, u)\cdot \\ &\quad (-\cos v, -2\,\mathrm{sen}\,v, 0)\,dudv \\ &= \iint_K (e^{-\mathrm{sen}\,v}, -\mathrm{sen}\,v, 2\cos v\,\mathrm{sen}\,u)\cdot \\ &\quad (-\cos v, -2\,\mathrm{sen}\,v, 0)\,dudv \\ &= \iint_K \left(-\cos v e^{-\mathrm{sen}\,v} + 2\,\mathrm{sen}^2 v\right)dudv \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^5 \left(-\cos v e^{-\mathrm{sen}\,v} + 2\,\mathrm{sen}^2 v\right)dudv \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\cos v e^{-\mathrm{sen}\,v} + 2\,\mathrm{sen}^2 v\right)u\Big|_0^5 dv \\ &= 5\int_0^{2\pi} \left(-\cos v e^{-\mathrm{sen}\,v} + 2\,\mathrm{sen}^2 v\right)dv \\ &= 5\left(e^{-\mathrm{sen}\,v} + v - \frac{\mathrm{sen}\,2v}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} \\ &= 10\pi \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Chamemos de φ a superfície do tetraedro em questão. Sabemos que o fluxo ψ do campo vetorial*

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2+y)\mathbf{i} + xy\mathbf{j} - (2xz+y)\mathbf{k}$$

através da superfície φ é dado por

$$\iint_\varphi F \cdot \mathbf{n} dS$$

*onde $\mathbf{n}$ é o vetor unitário normal à superficie φ. O **Teorema da Divergência** nos diz que*

$$\iint_\varphi \mathbf{F} \cdot n dS = \iiint_B \operatorname{div} \mathbf{F} dxdydz$$

onde B é interior da superfície φ, ou seja

$$B : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1-x \\ 0 \le z \le 1-x-y \end{cases}$$

Portanto, segue-se que

$$\begin{aligned} \psi &= \iiint_B \operatorname{div} \mathbf{F} dxdydz \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (2x + x - 2x) dzdydx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x dzdydx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} xz \Big|_0^{1-x-y} dydx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} x(1-x-y) dydx \\ &= \int_0^1 x \left(y - xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{1-x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x) dx \\ &= \frac{1}{24} \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *A superfície dada no problema possui a seguinte parametrização*

$$\varphi : \begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = v \\ z(u,v) = 1-u-v \end{cases}$$

com $(u,v) \in K$, onde

$$K : \begin{cases} 0 \le u \le 1 \\ 0 \le v \le 1-u \end{cases}$$

*O **Teorema de Stokes** afirma que*

$$\oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\Gamma = \iint_\varphi \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

Observe porém que

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = (-y, -z, -x)$$

e, além disto temos que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) = (1,0,-1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) = (0,1,-1)$$

donde segue-se que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) = (1,1,1)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\Gamma &= \iint_\varphi \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-u} \operatorname{rot} \mathbf{F}(\varphi(u,v)) \cdot (1,1,1) dvdu \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-u} \operatorname{rot} \mathbf{F}(u, v, 1-u-v) \cdot (1,1,1) dvdu \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-u} (-v, u+v-1, -u) \cdot (1,1,1) dvdu \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-u} (-1) dvdu \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^o. Edson

Prova Final **1^o Semestre** **2009**

Data: 15 de Junho **Duração: 18:00 - 20:00**

Problema 1 *Calcule*

$$\iint_B \sqrt[3]{y^2 - x^2}\,dxdy$$

onde B é o paralelogramo de vétices $(0,0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (0,1), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Problema 2 *Calcule a integral tripla* $\iiint_B z\,dxdydz$ *onde B é a região que está entre as esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ no primeiro octante.*

Problema 3 *Calcule a integral de linha* $\int_\gamma xy^4 ds$ *onde γ é a metade direita do círculo* $x^2 + y^2 = 16$.

Problema 4 *Calcule o fluxo do campo vetorial*

$$F(x,y,z) = e^{-y}\mathbf{i} - y\mathbf{j} + x \operatorname{sen} z\mathbf{k}$$

através da porção φ do cilindro elíptico

$$\varphi : \begin{cases} x(u,v) = 2\cos v \\ y(u,v) = \operatorname{sen} v \\ z(u,v) = u \end{cases} \quad onde \quad \begin{array}{l} 0 \le u \le 5 \\ 0 \le v \le 2\pi \end{array}$$

orientada no sentido positivo.

Problema 5 *Usando o* ***Teorema de Stokes****, calcule*

$$\oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\Gamma$$

onde

$$\mathbf{F}(x,y,z) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + zx\mathbf{k}$$

e Γ é o triângulo sobre o plano $x + y + z = 1$ de vértices $(1,0,0), (0,1,0)$ e $(0,0,1)$ com orientação anti-horária olhando do primeiro octante para a origem.

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^o. Edson

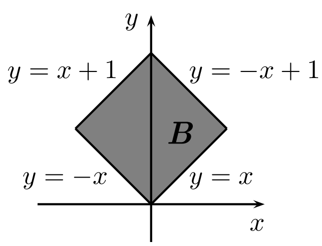
1^o Semestre

Gabarito Prova Final **2009**
Data: Segunda-feira, 15 de Junho **Turma E3**

Exercício 1 *Observe que*

$$\iint_B \sqrt[3]{y^2 - x^2}\,dxdy = \iint_B \sqrt[3]{(y-x)(y+x)}\,dxdy$$

e o conjunto B possui a seguinte representação gráfica



Fazendo a mudança de variáveis

$$\begin{cases} u = \quad x + y \\ v = -x + y \end{cases}$$

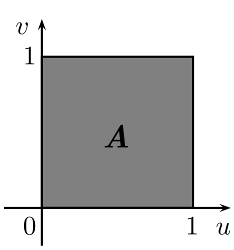
teremos

$$\begin{cases} x = \dfrac{u-v}{2} \\ u = \dfrac{u+v}{2} \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left|\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right| = \frac{1}{2}$$

e, neste novo sistema de variáveis o conjunto B será transformado no conjunto A que possui o seguinte gráfico

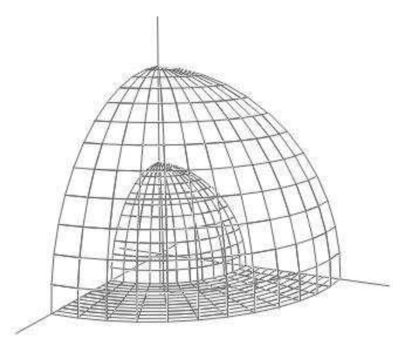


Ou seja

$$\begin{aligned} \iint_B \sqrt[3]{y^2 - x^2}\,dxdy &= \iint_A \frac{1}{2}\sqrt[3]{uv}\,dudv \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \sqrt[3]{u}\,\sqrt[3]{v}\,dudv \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{3}{4}\sqrt[3]{v}\,\sqrt[3]{u^4}\Big|_0^1 dv \\ &= \frac{1}{2}\frac{3}{4}\int_0^1 \sqrt[3]{v}\,dv \\ &= \frac{9}{32} \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Sendo B a região do espaço delimitada pelas esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ no primeiro octante, teremos o seguinte esboço da mesma*



Usando coordenadas esféricas, ou seja, tomando

$$\begin{cases} x = r \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

o conjunto B torna-se

$$B : \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

e, o jacobiano desta mudança de variáveis é

$$\left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} \right| = r^2 \text{sen}\,\varphi$$

Donde segue-se que

$$\begin{aligned}
\iiint_B z dxdydz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 r\cos\varphi r^2 \text{sen}\,\varphi dr d\theta d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 r^3 \cos\varphi\,\text{sen}\,\varphi dr d\theta d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^4}{4} \cos\varphi\,\text{sen}\,\varphi \Big|_1^2 d\theta d\varphi \\
&= \frac{15}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\,\text{sen}\,\varphi d\theta d\varphi \\
&= \frac{15}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\,\text{sen}\,\varphi \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \\
&= \frac{15\pi}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\,\text{sen}\,\varphi d\varphi
\end{aligned}$$

Tomando

$$u = \text{sen}\,\varphi$$

e observando que

$$du = \cos\varphi d\varphi$$

$$\varphi = 0 \Rightarrow u = 0$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 1$$

Segue-se que

$$\begin{aligned}
\iiint_B z dxdydz &= \frac{15\pi}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\,\text{sen}\,\varphi d\varphi \\
&= \frac{15\pi}{8} \int_0^1 u du \\
&= \frac{15\pi}{8} \frac{u^2}{2} \Big|_0^1 \\
&= \frac{15\pi}{16}
\end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Sendo γ a metade direita do círculo*

$$x^2 + y^2 = 16,$$

podemos parametrizar a curva γ da seguinte forma

$$\begin{cases} x(t) = 4\cos t \\ y(t) = 4\,\text{sen}\,t \end{cases}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

De onde segue-se que

$$\begin{aligned}
ds &= \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \\
&= \sqrt{16\cos^2 t + 16 \text{sen}^2 t} dt \\
&= 4dt
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma xy^4 ds &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos t (4\,\text{sen}\,t)^4 4dt \\
&= 4^6 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,\text{sen}^4\,t dt
\end{aligned}$$

Tome

$$u = \text{sen}\,t$$

e observe que

$$du = \cos t\, dt$$

$$t = -\tfrac{\pi}{2} \Rightarrow u = -1$$

$$t = \tfrac{\pi}{2} \Rightarrow u = 1$$

Então

$$\begin{aligned}
\int_\gamma xy^4 ds &= 4^6 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,\text{sen}^4\,t dt \\
&= 4^6 \int_{-1}^1 u^4 du \\
&= \frac{4^6}{5} u^5 \Big|_{-1}^1 \\
&= \frac{2 \cdot 4^6}{5}
\end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Sabemos que o fluxo do campo vetorial*

$$\mathbf{F}(x,y,z) = e^{-y}\mathbf{i} - y\mathbf{j} + xsenz\mathbf{k}$$

através da superfície

$$\varphi : \begin{cases} x(u,v) = 2\cos v \\ y(u,v) = \operatorname{sen} v \\ z(u,v) = u \end{cases}$$

onde $(u,v) \in K$*, com*

$$K : \begin{cases} 0 \leq u \leq 5 \\ 0 \leq v \leq 2\pi \end{cases}$$

na direção do vetor normal $\mathbf{n}$*, é dado por*

$$\iint_{\varphi} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

Para resolvermos esta integral de superfície, precisamos antes calcular:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v) = (0,0,1)$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v) = (-2\operatorname{sen} v, \cos v, 0)$$

donde segue-se que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v) = (-\cos v, -2\operatorname{sen} v, 0)$$

Com isto, temos então, que

$$\iint_{\varphi} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_K \mathbf{F}(\varphi(u,v)). \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) dudv$$

$$= \iint_K \mathbf{F}(2\cos v, \operatorname{sen} v, u) \cdot (-\cos v, -2\operatorname{sen} v, 0)\, dudv$$

$$= \iint_K (e^{-\operatorname{sen} v}, -\operatorname{sen} v, 2\cos v \operatorname{sen} u) \cdot (-\cos v, -2\operatorname{sen} v, 0)\, dudv$$

$$= \iint_K \left(-\cos v e^{-\operatorname{sen} v} + 2\operatorname{sen}^2 v\right) dudv$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^5 \left(-\cos v e^{-\operatorname{sen} v} + 2\operatorname{sen}^2 v\right) dudv$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\cos v e^{-\operatorname{sen} v} + 2\operatorname{sen}^2 v\right) u\Big|_0^5 dv$$

$$= 5\int_0^{2\pi} \left(-\cos v e^{-\operatorname{sen} v} + 2\operatorname{sen}^2 v\right) dv$$

$$= 5\left(e^{-\operatorname{sen} v} + v - \frac{\operatorname{sen} 2v}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= 10\pi$$

■

Exercício 5 *A superfície dada no problema possui a seguinte parametrização*

$$\varphi : \begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = v \\ z(u,v) = 1 - u - v \end{cases}$$

com $(u,v) \in K$*, onde*

$$K : \begin{cases} 0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1 - u \end{cases}$$

O ***Teorema de Stokes*** *afirma que*

$$\oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\Gamma = \iint_{\varphi} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

Observe porém que

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = (-y, -z, -x)$$

e, além disto temos que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v) = (1,0,-1)$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v) = (0,1,-1)$$

donde segue-se que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v) = (1,1,1)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\oint_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\Gamma &= \iint_\varphi \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS \\
&= \int_0^1\int_0^{1-u} \operatorname{rot}\mathbf{F}(\varphi(u,v))\cdot(1,1,1)dvdu \\
&= \int_0^1\int_0^{1-u} \operatorname{rot}\mathbf{F}(u,v,1-u-v)\cdot(1,1,1)dvdu \\
&= \int_0^1\int_0^{1-u} (-v, u+v-1, -u)\cdot(1,1,1)dvdu \\
&= \int_0^1\int_0^{1-u} (-1)dvdu \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^{o}. Edson

1ª Prova **1º Semestre** **2010**

Data: 21 de Janeiro **Duração: 14:00 - 18:00**

Problema 1 *Calcule a área da região delimitada pela elipse*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

onde a e b são números reais positivos.

Problema 2 *Calcule*

$$\iint_B x dx dy$$

onde B é a região compreendida entre os gráficos de $y = \cos x$ e $y = 1 - \cos x$ com $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Problema 3 *Inverta a ordem de integração da seguinte integral*

$$\int_0^1 \int_{2x}^{x+1} f(x,y) dy dx$$

onde f é uma função de duas variáveis.

Problema 4 *Calcule o volume do conjunto B formado pelos pontos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tais que $x^2 + 4y^2 \leq 4$ e $x + y \leq z \leq x + y + 1$.*

Problema 5 *Calcule a integral*

$$\iint_B (2x + y) \cos(x - y) dx dy$$

onde B é o paralelogramo de vértices $(0,0), (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}), (\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}), (\frac{\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3})$.

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof$^{\text{o}}$. Edson

1$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito 1ª Prova **2010**
Data: Terça-feira, 26 de Janeiro **Turma E3**

Exercício 1 *Podemos calcular a área A da região B delimitada pela elipse*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

através da seguinte integral dupla

$$A=\iint_B dxdy$$

Observe que

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

De modo que, usando a mudança de variáveis,

$$\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ \\ y = br\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

cujo jacobiano é dado por

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \left\| \begin{array}{cc} a\cos\theta & -ar\operatorname{sen}\theta \\ b\operatorname{sen}\theta & br\cos\theta \end{array} \right\| = abr$$

O conjunto B será transformado no conjunto

$$C:\begin{cases} 0\le r\le 1 \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$$

Donde segue-se que

$$\begin{aligned} A &= \iint_B dxdy \\ &= \iint_C abrdrd\theta \\ &= \int_0^1\int_0^{2\pi} abrd\theta dr \\ &= \int_0^1 2\pi abrdr \\ &= \pi ab \end{aligned}$$

$\blacksquare$

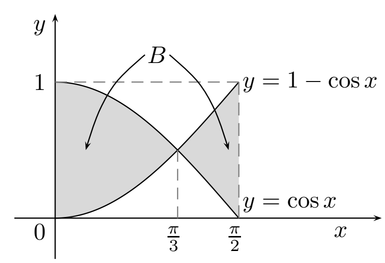
Exercício 2 *Inicialmente desenhemos o conjunto B dado pela região que está entre as curvas*

$$y=\cos x$$

e

$$y = 1-\cos x$$

com $0\le x\le \frac{\pi}{2}$:



Assim, segue-se que

$$B = B_1\cup B_2$$

onde

$$B_1:\begin{cases} 0\le x\le\frac{\pi}{3} \\ \\ 1-\cos x\le y\le\cos x \end{cases}$$

e

$$B_2:\begin{cases} \frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{2} \\ \\ \cos x\le y\le 1-\cos x \end{cases}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \iint\limits_B xdxdy &= \iint\limits_{B_1} xdxdy + \iint\limits_{B_1} xdxdy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_{1-\cos x}^{\cos x} xdydx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\cos x}^{1-\cos x} xdydx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} xy|_{1-\cos x}^{\cos x}\,dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} xy|_{\cos x}^{1-\cos x}\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} x(2\cos x-1)dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} x(1-2\cos x)dx \end{aligned}$$

Resolvendo estas integrais, obtemos,

$$\iint_B x dx dy = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi - \pi + \frac{\pi^2}{72}$$

$\blacksquare$

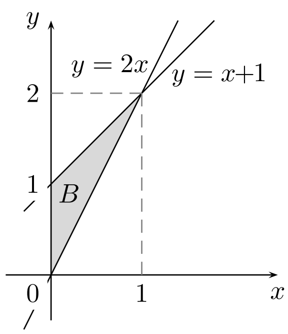
Exercício 3 *Perceba que o domínio de integração na integral*

$$\int_0^1 \int_{2x}^{x+1} f(x,y) dy dx$$

é o conjunto

$$B : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 2x \leq y \leq x+1 \end{cases}$$

cujo desenho é dado por



bserve que este mesmo conjunto pode ser descrito como

$$B = B_1 \cup B_2$$

onde

$$B_1 : \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq x \leq \dfrac{y}{2} \end{cases}$$

e

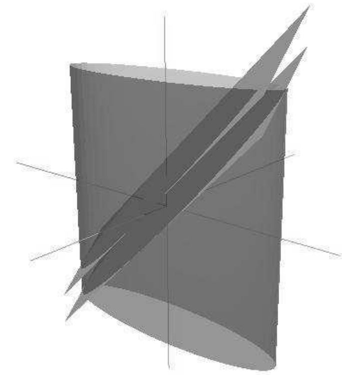
$$B_2 : \begin{cases} 1 \leq y \leq 2 \\ y-1 \leq x \leq \dfrac{y}{2} \end{cases}$$

Portanto,

$$\int_0^1 \int_{2x}^{x+1} f(x,y) dy dx = \int_0^1 \int_0^{\frac{y}{2}} f(x,y) dx dy + \int_1^2 \int_{y-1}^{\frac{y}{2}} f(x,y) dx dy$$

$\blacksquare$

Exercício 4 *Esboçando as superfícies que delimitam o conjunto B obtemos o seguinte gráfico*



Logo,

$$V(B) = \iint_C f(x,y) dx dy$$

onde C é o conjunto de todos os pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$x^2 + 4y^2 \leq 4$$

e

$$f(x,y) = (x+y+1) - (x+y) = 1$$

Ou seja,

$$V(B) = \iint_C f(x,y) dx dy = \textit{Área de } C$$

Como C é uma elipse de eixos 4 e 1, segue-se do resultado obtido no problema 01 que

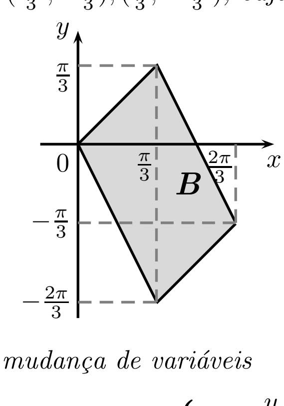
$$V(B) = \pi \cdot 4 \cdot 1 = 4\pi$$

$\blacksquare$

Exercício 5 *Desejamos calcular a integral dupla*

$$\iint_B (2x+y)\cos(x-y) dx dy$$

onde B é o paralelogramo de vértices $(0,0), (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}), (\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}), (\frac{\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3})$, cujo desenho é



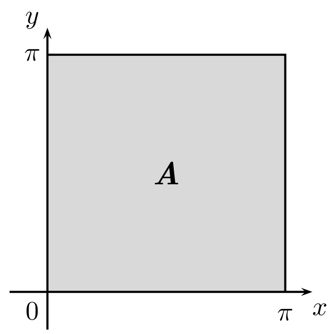
Efetuando a mudança de variáveis

$$\begin{cases} u = 2x + y \\ v = x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{3} \\ v = \dfrac{u-2v}{3} \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left\| \begin{array}{cc} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array} \right\| = \frac{1}{3}$$

O conjunto B será transformado no conjunto A cujo gráfico é



De modo que,

$$\begin{aligned}\iint\limits_B (2x+y)\cos(x-y)dxdy &= \iint\limits_A \tfrac{1}{3}u\cos v du dv \\ &= \tfrac{1}{3}\int_0^\pi \int_0^\pi u \cos v dv du \\ &= \tfrac{1}{3}\int_0^\pi u \operatorname{sen} v\Big|_0^\pi du \\ &= 0\end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof$^{\text{o}}$. Edson

2ª Prova **1º Semestre** **2010**

Data: 01 de Fevereiro **Duração: 14:00 - 18:00**

Problema 1 *Calcule a integral*

$$\iiint\limits_B xy\,dx\,dy\,dz$$

onde B *é o tetraedro sólido de vértices* $(0,0,0),(1,0,0),(0,2,0)$ *e* $(0,0,3)$.

Problema 2 *Calcule*

$$\iiint\limits_B \sqrt{x+y}\,\sqrt[3]{x+2y-z}\,dx\,dy\,dz$$

onde B *é a região* $1 \leq x+y \leq 2$, $0 \leq x+2y-z \leq 1$ *e* $0 \leq z \leq 1$.

Problema 3 *Calcule o momento de inércia do cilindro homogêneo* $(x-a)^2+y^2 \leq a^2$, $0 \leq z \leq h$, *em relação à reta* $x=a, y=0$, *onde* a *e* h *são números reais positivos.*

Problema 4 *Calcule*

$$\int\limits_\gamma dx+dy$$

onde γ *é a linha poligonal de vértices* $A_0=(0,0)$, $A_1=(1,2)$, $A_2=(-1,3)$, $A_3=(-2,1)$ *e* $A_4=(-1,1)$, *sendo* γ *orientada de* A_0 *para* A_4.

Problema 5 *Calcule o trabalho realizado pela força*

$$\mathbf{F}(x,y)=x\mathbf{i}+(y+2)\mathbf{j}$$

ao mover um objeto ao longo do arco de ciclóide $r(t)=(t-\operatorname{sen} t)\mathbf{i}+(1-\cos t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Boa Sorte!

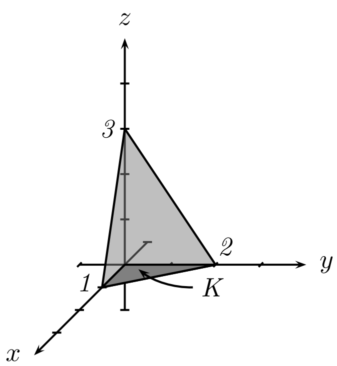
Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^{o}. Edson

1^{o} Semestre

Gabarito 2^{a} Prova **2010**
Data: Segunda-feira, 01 de Fevereiro **Turma E3**

Exercício 1 *Observe que o tetraedro sólido de vértices* $(0,0,0),(1,0,0),(0,2,0)$ *e* $(0,0,3)$ *possui o seguinte desenho*



que passa pelos pontos $(1,0,0),(0,2,0)$ *e* $(0,0,3)$. *Para isto, considere*

$$\vec{u} = (0,0,3) - (1,0,0) = (-1,0,3)$$

$$\vec{v} = (0,2,0) - (1,0,0) = (-1,2,0)$$

Precisamos portanto, encontrar a equação do plano e lembre-se que o vetor normal ao plano que estamos procurando, é dado por

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (-6,-3,-2)$$

Logo, a equação procurada é

$$-6x - 3y - 2z = d$$

onde $d \in \mathbb{R}$ *é um valor que ainda precisamos determinar. Como este plano deve passar pelo ponto* $(0,0,3)$ *segue-se que*

$$-6 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot 3 = d \Leftrightarrow d = -6$$

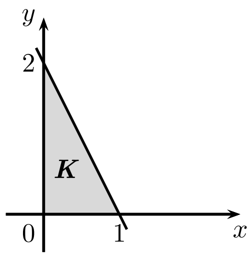
e a equação do plano é

$$6x + 3y + 2z = 6$$

Com isto, temos que

$$\iiint\limits_B xydxdydz = \iint\limits_K \left[\int_0^{\frac{6-6x-3y}{2}} xydz \right] dxdy$$

onde



$$K : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 - 2x \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_B xydxdydz &= \iint\limits_K \left[\int_0^{\frac{6-6x-3y}{2}} xydz \right] dxdy \\
&= \iint\limits_K xyz \Big|_0^{\frac{6-6x-3y}{2}} dxdy \\
&= \iint\limits_K xy\left(\tfrac{6-6x-3y}{2}\right)dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^{2-2x} xy\left(\tfrac{6-6x-3y}{2}\right)dydx \\
&= \tfrac{1}{2}\int_0^1 \int_0^{2-2x} (6xy - 6x^2y - 3xy^2)dydx \\
&= \tfrac{1}{2}\int_0^1 (3xy^2 - 3x^2y^2 - xy^3)\Big|_0^{2-2x} dx \\
&= \tfrac{1}{2}\int_0^1 4x\,(1-x)^3\,dx \\
&= \tfrac{1}{10}
\end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Queremos resolver a integral*

$$I = \iiint\limits_B \sqrt{x+y}\,\sqrt[3]{x+2y-z}dxdydz$$

onde B *é a região* $1 \leq x+y \leq 2$, $0 \leq x+2y-z \leq 1$ *e* $0 \leq z \leq 1$. *Para isto façamos a seguinte mudança* *de variáveis*

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x + 2y - z \\ w = z \end{cases}$$

e observe que

$$\begin{cases} x = 2u - v - w \\ y = -u + v + w \\ z = w \end{cases}$$

onde

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = \left\|\begin{array}{rrr} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right\| = 1$$

Com estas novas variáveis, o conjunto B será transformado no conjunto

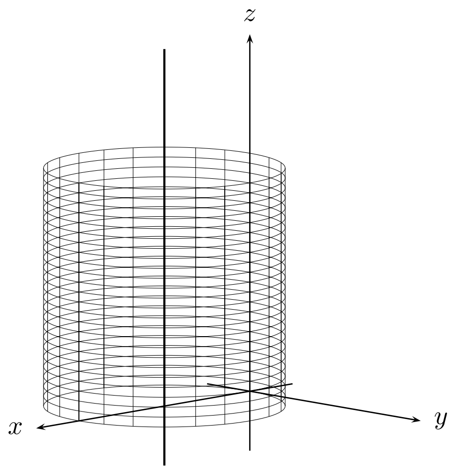
$$A : \begin{cases} 1 \leq u \leq 2 \\ 0 \leq v \leq 1 \\ 0 \leq w \leq 1 \end{cases}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} I &= \iiint\limits_A \sqrt{u}\sqrt[3]{v}dudvdw \\ &= \int_0^1\int_0^1\int_1^2 \sqrt{u}\sqrt[3]{v}dudvdw \\ &= \int_0^1\int_0^1 \tfrac{2}{3}\sqrt{u^3}\sqrt[3]{v}\Big|_1^2 dvdw \\ &= \int_0^1\int_0^1 \tfrac{2}{3}(\sqrt{8}-1)\sqrt[3]{v}dvdw \\ &= \int_0^1 \tfrac{1}{2}(\sqrt{8}-1)\sqrt[3]{v^4}\Big|_0^1 dw \\ &= \int_0^1 \tfrac{1}{2}(\sqrt{8}-1)dw \\ &= \tfrac{1}{2}(\sqrt{8}-1) \end{aligned}$$

■

Exercício 3 *O conjunto em questão, possui o seguinte desenho*



A distância $\mathbf{d}$ de um ponto (x,y,z) do cilindro a um ponto $(a,0,z)$ da reta $x = a, y = 0$, é dada por

$$\mathbf{d} = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

e, considerando o sólido dado tendo densidade homogênea

$$\delta(x,y,z) = k, \;\; k \in \mathbb{R}$$

o momento de inércia do mesmo em relação a reta dada é

$$I = \iiint\limits_B \mathbf{d}^2 dxdydz$$

Usando as coordenadas

$$\begin{cases} x = a + r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases}$$

com

$$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq a \\ 0 \leq z \leq h \end{cases}$$

e

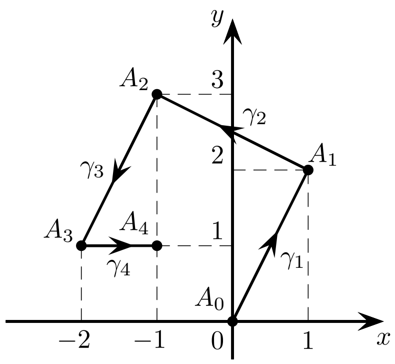
$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| = r$$

teremos

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^h \mathbf{d}^2 r dz dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^h r^2 r dz dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^a r^3 z\Big|_0^h dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^a hr^3 dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{hr^4}{4}\Big|_0^a d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{ha^4}{4} d\theta \\
&= \frac{ha^4}{4}\theta\Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{\pi h a^4}{2}
\end{aligned}$$

■

Exercício 4 *A linha poligonal dada possui o seguinte esboço*



Chamaremos de γ_i *a linha reta que une os pontos* A_{i-1} *e* A_i *com* $i = 1,2,3,4$. *As parametrizaçãos destas retas são dadas por*

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}, 0 \le t \le 1$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x = 1-2t \\ y = 2+t \end{cases}, 0 \le t \le 1$$

$$\gamma_3 : \begin{cases} x = -1-t \\ y = 3-2t \end{cases}, 0 \le t \le 1$$

$$\gamma_4 : \begin{cases} x = -2+t \\ y = 1 \end{cases}, 0 \le t \le 1$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\int_\gamma dx + dy &= \int_{\gamma_1}(dx+dy) + \int_{\gamma_2}(dx+dy) + \\
&\quad + \int_{\gamma_3}(dx+dy) + \int_{\gamma_4}(dx+dy) \\
&= \int_0^1 (dt + 2dt) + \int_0^1 (-2dt + dt) \\
&\quad + \int_0^1 (-dt - 2dt) + \int_0^1 dt \\
&= \int_0^1 (3dt - dt - 3dt + dt) \\
&= \int_0^1 0 dt = 0
\end{aligned}$$

■

Exercício 5 *O trabalho* τ *realizado pela força*

$$\mathbf{F}(x,y) = x\mathbf{i} + (y+2)\mathbf{j}$$

ao mover um objeto ao longo do arco de ciclóide

$$\mathbf{r}(t) = (t - \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (1-\cos t)\mathbf{j}, 0 \le t \le 2\pi$$

é dado por

$$\begin{aligned}
\tau &= \int_{\mathbf{r}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \\
&= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot(1-\cos t, \operatorname{sen} t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(t-\operatorname{sen} t, 1-\cos t)\cdot(1-\cos t, \operatorname{sen} t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} (t-\operatorname{sen} t, 3-\cos t)\cdot(1-\cos t, \operatorname{sen} t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} (t - t\cos t + 2\operatorname{sen} t)dt \\
&= (\tfrac{1}{2}t^2 - t\operatorname{sen} t - 3\cos t)\Big|_0^{2\pi} \\
&= 2\pi^2
\end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof$^{\text{o}}$. Edson

3ª Prova **1º Semestre** **2010**

Data: 11 de Fevereiro **Duração: 14:00 - 18:00**

Problema 1 *Calcule a integral de linha*

$$\int_\gamma (y + e^{\sqrt{x}})dx + (2x + \cos y^2)dy$$

onde γ *é a fronteira da região delimitada pelas parábolas* $y = x^2$ *e* $x = y^2$*, orientada no sentido anti-horário.*

Problema 2 *Calcule a área da região do plano* $x + y + z = a$ *limitada pelo cilindro* $x^2 + y^2 = a^2$.

Problema 3 *Uma superfície parametrizada* S *é dada por*

$$\varphi : \begin{cases} x(u,v) = u\cos v \\ y(u,v) = u\,\text{sen}\, v \\ z(u,v) = u^2 \end{cases} \quad \textit{onde} \quad \begin{cases} 0 \le u \le 4 \\ 0 \le v \le 2\pi \end{cases}$$

Sabendo que a área de S *é* $\frac{\pi}{n}(65\sqrt{65} - 1)$*, determine o valor de* n.

Problema 4 *Seja* S *uma região plana cuja fronteira é o triângulo de vértices* $(1,0,0), (0,1,0)$ *e* $(0,0,1)$. *Calcule o fluxo do campo vetorial* $F(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ *através de* S *na direção do vetor* $\mathbf{n}$ *unitário normal a* S *com componente* z *não negativa.*

Problema 5 *Sejam* $F(x,y,z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$ *e* φ *a superfície* $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ *com* $\sqrt{2} \le z \le \sqrt{3}$ *e* $y \ge 0$. *Calcule*

$$\iint_\varphi rotF \cdot \mathbf{n} ds$$

onde $\mathbf{n}$ *é o vetor normal à* φ *que aponta para cima.*

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^{o}. Edson

1^{o} Semestre

Gabarito 3ª Prova **2010**
Data: Quinta-feira, 11 de Fevereiro **Turma E3**

Exercício 1 *Como a região delimitada pelas parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$ é fechada, limitada, possui fronteira γ contínua por partes e o campo vetorial para o qual desejamos calcular nossa integral de linha está definido nela, podemos, portanto, usar o Teorema de Green que nos apermite afirmar que*

$$\begin{aligned}\int_\gamma (y+e^{\sqrt{x}})dx + (2x+\cos y^2)dy &= \\ \iint\limits_K \left[\tfrac{\partial}{\partial x}(2x+\cos y^2) - \tfrac{\partial}{\partial y}(y+e^{\sqrt{x}})\right] dudv &= \\ \iint\limits_K dudv\end{aligned}$$

onde

$$K : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le \sqrt{x} \end{cases}$$

Ou seja

$$\begin{aligned}\int_\gamma (y+e^{\sqrt{x}})dx + (2x+\cos y^2)dy &= \\ \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dydx &= \\ \tfrac{1}{3}\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Exercício 2 *Chamemos de φ a região do plano $x + y + z = a$ que é lilmitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = a^2$. Tal superfície pode ser parametrizada da seguinte forma:*

$$\varphi : \begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = v \\ z(u,v) = a - u - v \end{cases}, (u,v) \in K$$

onde

$$K = \{\,(u,v) \in \mathbb{R}^2 \big|\, u^2 + v^2 \le a^2\}$$

Com isto, segue-se que a área desta superfície será dada por

$$A = \iint\limits_\varphi ds = \iint\limits_K \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right\| dudv$$

Observe que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v) = (1,0,-1)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v) = (0,1,-1)$$

e

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v} = (1,1,1)$$

$$\left\| \frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right\| = \sqrt{3}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} A &= \iint\limits_K \sqrt{3} dudv \\ &= \sqrt{3}\iint\limits_K dudv \\ &= \sqrt{3} \cdot \acute{A}rea(K) \\ &= \sqrt{3}\pi a^2 \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Exercício 3 *A área A da superfície*

$$\varphi : \begin{cases} x(u,v) = u\cos v \\ y(u,v) = u \operatorname{sen} v \\ z(u,v) = u^2 \end{cases}, \ (u,v) \in K$$

com

$$K : \begin{cases} 0 \le u \le 4 \\ 0 \le v \le 2\pi \end{cases}$$

é dada pela seguinte integral de superfície

$$A = \iint\limits_\varphi ds = \iint\limits_K \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right\| dudv$$

Observe que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v) = (\cos v, \operatorname{sen} v, 2u)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v) = (-u\operatorname{sen} v, u\cos v, 0)$$

e
$$\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right\| = u\sqrt{4u^2+1}$$
Logo,
$$\begin{aligned} A &= \int_0^4\int_0^{2\pi} u\sqrt{4u^2+1}dvdu \\ &= \int_0^4 2\pi u\sqrt{4u^2+1}du \\ &= \tfrac{\pi}{6}\left(65\sqrt{65}-1\right) \end{aligned}$$
Então, segue-se que $n=6$. ■

Exercício 4 *Inicialmente precisamor determinar o plano que contém os pontos $(1,0,0),(0,1,0)$ e $(0,0,1)$. Para isto observe que os vetores*
$$w_1 = (0,1,0)-(1,0,0) = (-1,1,0)$$
$$w_2 = (0,0,1)-(1,0,0) = (-1,0,1)$$
são paralelos ao plano que procuramos. Assim, o vetor normal deste plano com componente z não negativa é dado por
$$n = w_1\times w_2 = (1,1,1)$$
Logo a equação do plano é dada por
$$[(x,y,z)-(0,1,0)]\cdot n = 0$$
ou seja
$$x+y+z=1$$
Chamando de φ a região deste plano limitado pelo triângulo de vértices $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$, temos que uma parametrização do mesmo é dada por
$$\varphi:\begin{cases} x(u,v)=u \\ y(u,v)=v \\ z(u,v)=1-u-v \end{cases},(u,v)\in K$$
onde
$$K:\begin{cases} 0\le u\le 1 \\ 0\le v\le 1-u \end{cases}$$
Portanto, o fluxo do campo vetorial $F(x,y,z) = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ através de φ na direção do vetor n, é dado por
$$\begin{aligned} \iint_\varphi F\cdot nds &= \iint_K F(\varphi(u,v))\cdot(1,1,1)dudv \\ &= \int_0^1\int_0^{1-u} dvdu \\ &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$
■

Exercício 5 *Observe que, sendo φ a região da esfera $x^2+y^2+z^2=4$ tal que $\sqrt{2}\le z\le\sqrt{3}$ e $y\ge 0$, uma parametrização desta superfície é dada por*
$$\varphi:\begin{cases} x(u,v)=2\,\mathrm{sen}\,u\cos v \\ y(u,v)=2\,\mathrm{sen}\,u\,\mathrm{sen}\,v \\ z(u,v)=2\cos u \end{cases},(u,v)\in K$$
onde
$$K:\begin{cases} \frac{\pi}{6}\le u\le\frac{\pi}{4} \\ 0\le v\le\pi \end{cases}$$
Assim, podemos perceber que a fronteira do conjunto K define a curva
$$\gamma = \gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3\cup\gamma_4$$
onde
$$\gamma_1:\begin{cases} u=t \\ v=0 \end{cases},\tfrac{\pi}{6}\le t\le\tfrac{\pi}{4}$$
$$\gamma_2:\begin{cases} u=\frac{\pi}{4} \\ v=t \end{cases},0\le t\le\pi$$
$$-\gamma_3:\begin{cases} u=t \\ v=\pi \end{cases},\tfrac{\pi}{6}\le t\le\tfrac{\pi}{4}$$
$$-\gamma_4:\begin{cases} u=\frac{\pi}{6} \\ v=t \end{cases},0\le t\le\pi$$
Logo, a fronteira da superfície φ será dada por
$$\Gamma = \Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3\cup\Gamma_4$$
onde
$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \varphi(\gamma_1) \\ &= \varphi(t,0) \\ &= (2\,\mathrm{sen}\,t,0,2\cos t) \end{aligned}$$
com
$$\frac{\pi}{6}\le t\le\frac{\pi}{4}$$
do mesmo modo,
$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= \varphi(\gamma_2) \\ &= \varphi(\tfrac{\pi}{4},t) \\ &= (\sqrt{2}\cos t,\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,t,\sqrt{2}) \end{aligned}$$
com
$$0\le t\le\pi$$
e
$$\begin{aligned} -\Gamma_3 &= \varphi(-\gamma_3) \\ &= \varphi(t,\pi) \\ &= (-2\,\mathrm{sen}\,t,0,2\cos t) \end{aligned}$$

com

$$\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{4}$$

e por fim,

$$\begin{aligned} -\Gamma_4 &= \varphi(-\gamma_4) \\ &= \varphi(\tfrac{\pi}{6}, t) \\ &= (\cos t, \operatorname{sen} t, \sqrt{3}) \end{aligned}$$

com

$$0 \leq t \leq \pi$$

Assim, como o conjunto K é fechado, limitado, com fronteira C^1 por partes e o campo vetorial

$$F(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$$

está definido em todo o conjunto K, podemos usar o ***Teorema de Stokes*** *que nos permite afirmar que*

$$\begin{aligned} \iint_{\varphi} \operatorname{rot} F \cdot \mathbf{n} ds &= \int_{\Gamma} F \cdot d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_1} F \cdot d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} F \cdot d\Gamma_2 + \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} F \cdot d\Gamma_3 + \int_{\Gamma_4} F \cdot d\Gamma_4 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} F \cdot d\Gamma_1 &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} F(2\operatorname{sen} t, 0, 2\cos t) \cdot \\ &\quad \cdot (2\cos t, 0, -2\operatorname{sen} t) dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (0, 2\operatorname{sen} t, 4\operatorname{sen}^2 t) \cdot \\ &\quad \cdot (2\cos t, 0, -2\operatorname{sen} t) dt \\ &= -\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 8\operatorname{sen}^3 t \, dt \\ &= \tfrac{10}{3}\sqrt{2} - 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2} F \cdot d\Gamma_2 &= \int_0^{\pi} F(\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\operatorname{sen} t, \sqrt{2}) \cdot \\ &\quad \cdot (-\sqrt{2}\operatorname{sen} t, \sqrt{2}\cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{\pi} (-\sqrt{2}\operatorname{sen} t, \sqrt{2}\cos t, 2\cos^2 t) \cdot \\ &\quad \cdot (-\sqrt{2}\operatorname{sen} t, \sqrt{2}\cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{\pi} 2dt \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3} F \cdot d\Gamma_3 &= -\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} F(-2\operatorname{sen} t, 0, 2\cos t) \cdot \\ &\quad \cdot (-2\cos t, 0, -2\operatorname{sen} t) dt \\ &= -\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (0, -2\operatorname{sen} t, 4\operatorname{sen}^2 t) \cdot \\ &\quad \cdot (-2\cos t, 0, -2\operatorname{sen} t) dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 8\operatorname{sen}^3 t \, dt \\ &= 3\sqrt{3} - \tfrac{10}{3}\sqrt{2} \end{aligned}$$

por fim,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_4} F \cdot d\Gamma_4 &= -\int_0^{\pi} F(\cos t, \operatorname{sen} t, \sqrt{3}) \cdot \\ &\quad \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0) dt \\ &= -\int_0^{\pi} (-\operatorname{sen} t, \cos t, \cos^2 t) \cdot \\ &\quad \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0) dt \\ &= -\int_0^{\pi} dt \\ &= -\pi \end{aligned}$$

E finalmente, segue-se que

$$\iint_{\varphi} rot F \cdot \mathbf{n} ds = \pi$$

∎

Exercício 6 (Outra Solução para o problema 5) *Observe que, sendo φ a região da esfera $x^2+y^2+z^2 = 4$ tal que $\sqrt{2} \leq z \leq \sqrt{3}$ e $y \geq 0$, uma parametrização desta superfície é dada por*

$$\varphi : \begin{cases} x(u, v) = 2\operatorname{sen} u \cos v \\ y(u, v) = 2\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ z(u, v) = 2\cos u \end{cases}, (u, v) \in K$$

onde

$$K : \begin{cases} \frac{\pi}{6} \leq u \leq \frac{\pi}{4} \\ 0 \leq v \leq \pi \end{cases}$$

Assim, o vetor normal a esta superfície no ponto $\varphi(u, v)$ é dado por

$$\mathbf{n}_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

onde

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = (2\cos u\cos v, 2\cos u\,\mathrm{sen}\,v, -2\,\mathrm{sen}\,u)$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial v} = (-2\,\mathrm{sen}\,u\,\mathrm{sen}\,v, 2\,\mathrm{sen}\,u\cos v, 0)$$

Logo,

$$\mathbf{n}_1 = (4\cos v\,\mathrm{sen}^2 u, 4\,\mathrm{sen}\,v\,\mathrm{sen}^2 u, 4\cos u\,\mathrm{sen}\,u)$$

Agora, calculando o rotacional do campo

$$F(x,y,z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$$

obtemos

$$rotF = (0, -2x, 2)$$

Com isto, segue-se que

$$\begin{aligned}
\iint_{\varphi} rotF\cdot\mathbf{n}ds &= \iint_K rotF(\varphi(u,v))\cdot\frac{\mathbf{n}_1}{\|\mathbf{n}_1\|}\,\|\mathbf{n}_1\|\,dudv \\
&= \iint_K rotF(\varphi(u,v))\cdot\mathbf{n}_1 dudv \\
&= \iint_K (-16\,\mathrm{sen}^3 u\cos v\mathrm{sen}\,v + \\
&\quad + 8\cos u\,\mathrm{sen}\,u)dudv \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\pi} (-16\,\mathrm{sen}^3 u\cos v\mathrm{sen}\,v + \\
&\quad + 8\cos u\,\mathrm{sen}\,u)dvdu \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 8\pi\,\mathrm{sen}\,u\cos u\,du \\
&= 4\,\pi\,\mathrm{sen}^2 u\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \pi
\end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Coelgiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^{o}. Edson

Prova Final **1^{o} Semestre** **2010**

Data: Sexta-feira, 12 de Fevereiro **Duração: 14:00 - 18:00**

Problema 1 *Calcule as integrais:*

a). $\displaystyle\iint\limits_B \frac{e^{y-x^2}}{y-x^2}dxdy$ *onde* B *é o conjunto de todos os* $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *tais que* $1+x^2\leq y\leq 2+x^2$, $y\geq x+x^2$ *e* $x\geq 0$.

b). $\displaystyle\iint\limits_B x^2dxdy$ *onde* B *é o conjunto de todos os* $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *tais que* $4x^2+y^2\leq 1$ *e* $y\geq 0$.

Problema 2 *Determine o volume do tetraedro limitado pelos planos* $x+2y+z=2$, $x=2y$, $x=0$, *e* $z=0$.

Problema 3 *Calcule a massa do cone* $\sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq 1$ *sendo a densidade no ponto* (x,y,z) *proporcional ao quadrado da distância do ponto ao eixo* z.

Problema 4 *Calcule*

$$\int_\gamma \frac{-y}{4x^2+y^2}dx+\frac{x}{4x^2+y^2}dy$$

onde γ *tem por imagem a elipse* $4x^2+y^2=9$ *e o sentido de percurso é o anti-horário.*

Problema 5 *Usando o Teorema de Stokes, calcule* $\displaystyle\int_\Gamma \tilde{\mathbf{F}}\cdot d\Gamma$ *onde*

$$\tilde{\mathbf{F}}(x,y,z)=yz\tilde{\mathbf{i}}+2xz\tilde{\mathbf{j}}+e^{xy}\tilde{\mathbf{k}}$$

e Γ *é a circunferência* $x^2+y^2=16$ *e* $z=5$ *orientada no sentido anti-horário.*

Boa sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof°. Edson

1° Semestre

Gabarito Prova Final **2010**
Data: Sábado, 13 de Fevereiro **Turma E3**

Exercício 1

a). *Considere a seguinte mudança de variável*

$$\begin{cases} u = y - x^2 \\ v = x \end{cases}$$

teremos com isto

$$\begin{cases} x = v \\ y = u - v^2 \end{cases}$$

e o jacobiano desta mudança será

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2v \end{vmatrix} = 1$$

e além disso

$$\begin{array}{lcl} x = 0 & \Rightarrow & v = 0 \\ y = 1 + x^2 & \Rightarrow & u = 1 \\ y = 1 + x^2 & \Rightarrow & u = 2 \\ y = x + x^2 & \Rightarrow & u = v \end{array}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \iint_B \frac{e^{y-x^2}}{y-x^2}dxdy &= \int_1^2\int_0^u \frac{e^u}{u}dvdu \\ &= \int_1^2 \tfrac{e^u}{u}\ v\big|_0^u\, du \\ &= \int_1^2 e^u du \\ &= e^u\big|_1^2 \\ &= e^2 - e \end{aligned}$$

□

b). *Observe que*

$$4x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow (2x)^2 + y^2 = 1$$

então, usando coordenadas polares, podemos representar a região

$$B = \left\{ (x,y) \in R^2 \middle| 4x^2 + y^2 \le 1, y \ge 0 \right\}$$

da seguinte maneira

$$\begin{cases} 2x = r\cos\,\theta \\ y = r\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

com

$$\begin{array}{l} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le \pi \end{array}$$

e

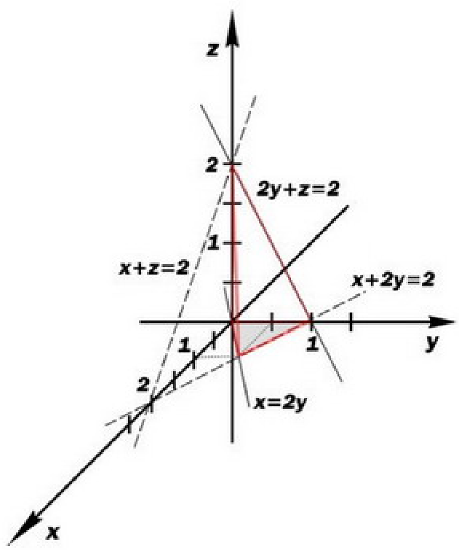
$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\cos\,\theta & -\frac{1}{2}r\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\,\theta \end{vmatrix} = \frac{1}{2}r$$

Logo

$$\begin{aligned} \iint_B x^2dxdy &= \int_0^1\int_0^\pi \tfrac{1}{4}r^2\cos^2\theta\tfrac{1}{2}rd\theta dr \\ &= \tfrac{1}{8}\int_0^1\int_0^\pi r^3\cos^2\theta d\theta dr \\ &= \tfrac{1}{8}\int_0^1 r^3\ \left(\tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{4}\sin 2\theta\right)\Big|_0^\pi \\ &= \tfrac{\pi}{16}\int_0^1 r^3dr \\ &= \tfrac{\pi}{16}\ \tfrac{r^4}{4}\Big|_0^1 \\ &= \tfrac{\pi}{64} \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Esboçando a região dada obtemos o seguinte desenho:*



Desta forma, o tetraedro em questão pode ser representado pelo conjunto

$$R = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq x \leq 1, \tfrac{x}{2} \leq y \leq \tfrac{2-x}{2}, 0 \leq z \leq 2-x-2y\right\}$$

e seu volume pode ser obtido da seguinte forma

$$\begin{aligned} V &= \iiint_R dxdydz \\ &= \int_0^1 \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{2-x}{2}} \int_0^{2-x-2y} dzdydx \\ &= \int_0^1 \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{2-x}{2}} (2-x-2y)\, dydx \\ &= \int_0^1 \left(2y - xy - y^2\right)\Big|_{\frac{x}{2}}^{\frac{2-x}{2}} dx \\ &= \int_0^1 \left(1 - 2x + x^2\right) dx \\ &= x - x^2 + \tfrac{1}{3}x^3\Big|_0^1 \\ &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

■

Exercício 3 *A massa do cone em questão pode ser obtida através da seguinte integral*

$$M = \iiint_C \delta(x,y,z)dxdzdy$$

onde $\delta(x,y,z)$ é a densidade do cone C no ponto de coordenadas (x,y,z).
Como a densidade no ponto (x,y,z) é proporcional ao quadrado da distância deste ponto ao eixo z, segue-se que

$$\delta(x,y,z) = k(x^2+y^2), k \in \mathbb{R}$$

Assim, usando coordenadas cilíndricas, ou seja

$$\begin{cases} x = r\cos\theta & \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ y = r\text{sen }\theta \quad \textit{onde} & \qquad 0 \leq r \leq 1 \\ z = z & \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1 \end{cases}$$

e

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| = r$$

Desta forma, a massa do cone será

$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 k(x^2+y^2)rdzdrd\theta$$

Resolvendo esta integral, teremos

$$\begin{aligned} M &= k\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 (x^2+y^2)rdzdrd\theta \\ &= k\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^1 r^3dzdrd\theta \\ &= k\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3z\big|_r^1\, drd\theta \\ &= k\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^3-r^4)drd\theta \\ &= k\int_0^{2\pi} \tfrac{1}{4}r^4 - \tfrac{1}{5}r^5\big|_0^1\, d\theta \\ &= \tfrac{k}{20}\int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \tfrac{k\pi}{10} \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Observe que*

$$4x^2+y^2 = 9 \Leftrightarrow \left(\frac{2x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$$

Então, a curva γ pode ser parametrizada da seguinte forma

$$\gamma : \begin{cases} \frac{2x}{3} = \cos\theta \\ \frac{y}{3} = \text{sen }\theta \end{cases} \quad \textit{com } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Desta forma, se considerarmos

$$A = \int_\gamma \frac{-y}{4x^2+y^2}dx + \frac{x}{4x^2+y^2}dy$$

teremos que

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \tfrac{-3\text{sen }\theta}{9}\tfrac{-3\text{sen }\theta}{2}d\theta + \tfrac{3\cos\theta}{2}\tfrac{3\cos\theta}{9}d\theta \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\text{sen}^2\ \theta + \cos^2\theta\right)d\theta \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \pi \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Considere a seguinte superfície*

$$\sigma : \begin{cases} x = r\cos\ \theta \\ y = r\text{sen }\theta \\ z = 5 \end{cases}$$

onde

$$K : \begin{cases} 0 \le r \le 4 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

Observe que a fronteira da superfície σ é a circunferência

$$\Gamma : \begin{cases} x^2+y^2 = 16 \\ z = 5 \end{cases}$$

Assim, usando o Teorema de Stokes, temos que

$$\begin{aligned} \int_\Gamma F\cdot d\Gamma &= \iint_\sigma \text{rot } F\cdot \mathbf{n}dS \\ &= \iint_K \text{rot } F\cdot\left(\tfrac{\partial\sigma}{\partial r}\times\tfrac{\partial\sigma}{\partial\theta}\right)drd\theta \end{aligned}$$

Onde

$$\frac{\partial\sigma}{\partial r}\times\frac{\partial\sigma}{\partial\theta} = (0,0,r)$$

e

$$\begin{aligned} \text{rot } F &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & 2xz & e^{xy} \end{vmatrix} \\ &= (xe^{xy}-2x)\vec{i} - (ye^{xy}-y)\vec{j} + (2z-z)\vec{k} \\ &= (xe^{xy}-2x, ye^{xy}-y, z) \end{aligned}$$

E, finalmente temos,

$$\begin{aligned} \int_\Gamma F\cdot d\Gamma &= \iint_K \text{rot } F\cdot\left(\tfrac{\partial\sigma}{\partial r}\times\tfrac{\partial\sigma}{\partial\theta}\right)drd\theta \\ &= \iint_K r\mathbf{z}drd\theta \\ &= \int_0^4\int_0^{2\pi} 5rd\theta dr \\ &= 10\pi\int_0^4 rdr \\ & 5\pi r^2\Big|_0^4 \\ &= 80\pi \end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^{o}. Edson

1ª Prova **1º Semestre** **2012**

Data: 04 de Abril **Duração: 10:00 - 12:00**

Problema 1 *Calcule*

$$\iint_B f(x,y)dxdy$$

sendo dados:

a). $f(x,y) = x$ e B o triângulo de vértices $(0,0),(1,1)$ e $(2,0)$;

b). $f(x,y) = x^2$ e B o conjunto de todos os (x,y) tais que $x \leq y \leq -x^2 + 2x + 2$.

Problema 2 *Inverta a ordem de integração:*

$$\int_0^3 \left[\int_{x^2-2x}^{\sqrt{3x}} f(x,y)dy \right] dx$$

Problema 3 *Calcule a área do conjunto*

$$B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, x > 0, \frac{4}{x} \leq 3y \leq -3x^2 + 7x \right\}$$

Problema 4 *Calcule a integral*

$$\iint_B (2x+y)\cos(x-y)dxdy$$

onde B é o paralelogramo de vértices $(0,0), (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}), (\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}), (\frac{\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3})$.

Problema 5 *Calcule o centro de massa do conjunto formado por todos os (x,y) tais que $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ e $y \geq 0$ e cuja densidade é proporcional à distância do ponto à origem.*

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

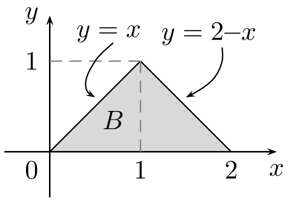
Profº. Edson

1º Semestre

Gabarito 1ª Prova **2012**
Data: Domingo, 15 de Abril **Turma 13**

Exercício 1

a). Desenhando o conjunto B obtemos a seguinte figura:



Assim, segue-se que

$$\iint_B f(x,y)dxdy =$$

$$= \int_0^1 \int_y^{2-y} x\, dxdy$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2}{2} \Bigg|_y^{2-y} dy$$

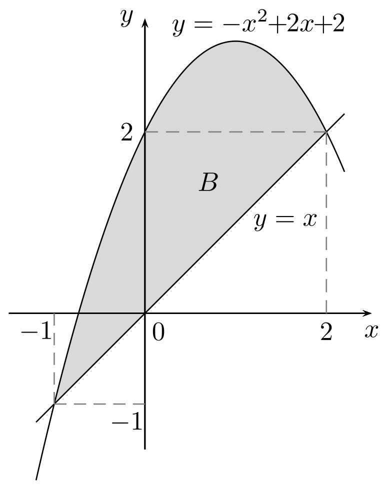
$$= 2\int_0^1 (1-y)dy$$

$$= 2\left(y - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= 1$$

□

b). Desenhando o conjunto B obtemos a seguinte figura



De onde podemos concluir que

$$B : \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ x \leq y \leq -x^2 + 2x + 2 \end{cases}$$

Ou seja,

$$\iint_B f(x,y)\, dxdy = \int_{-1}^{2}\int_{x}^{-x^2+2x+2} x^2 dydx$$

$$= \int_{-1}^{2} x^2 y \Bigg|_x^{-x^2+2x+2} dx$$

$$= \int_{-1}^{2} \left(-x^4 + x^3 + 2x^2\right) dx$$

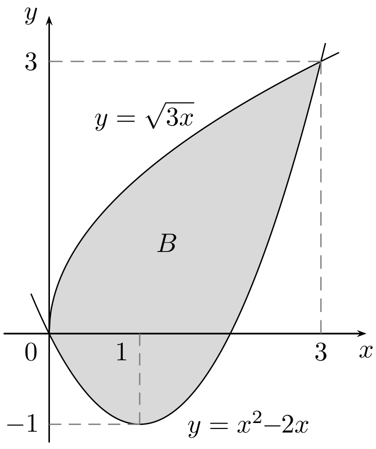
$$= \frac{63}{20}$$

■

Exercício 2 *O domínio de integração na integral dada é o conjunto*

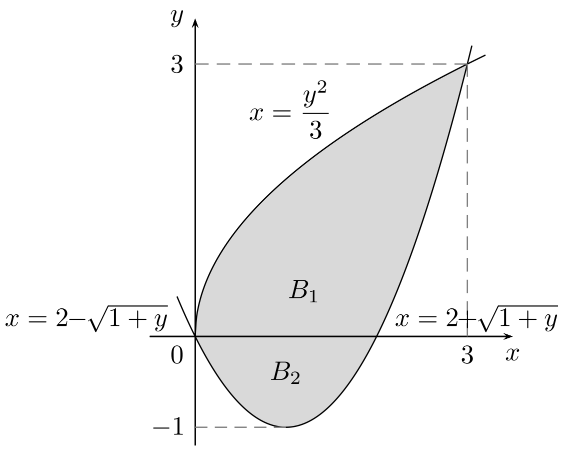
$$B : \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 2x \leq y \leq \sqrt{3x} \end{cases}$$

Desenhando este conjunto, teremos a seguinte figura



Donde segue-se que o conjunto B pode ser reescrito como

$$B = B_1 \cup B_2$$



onde

$$B_1 : \begin{cases} \dfrac{y^2}{3} \leq x \leq 2+\sqrt{1+y} \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases}$$

e

$$B_2 : \begin{cases} 2-\sqrt{1+y} \leq x \leq 2+\sqrt{1+y} \\ -1 \leq y \leq 0 \end{cases}$$

Portanto

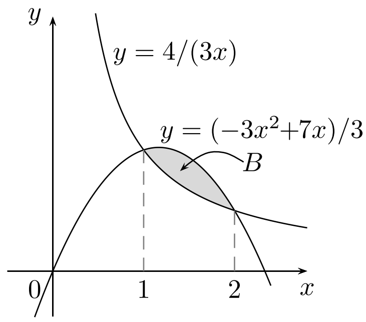
$$\int_0^3 \int_{x^2-2x}^{\sqrt{3x}} f(x,y)dydx = \iint_B f(x,y)dxdy$$

$$= \iint_{B_1} f(x,y)dxdy +$$
$$+ \iint_{B_2} f(x,y)dxdy$$

$$= \int_0^3 \int_{\frac{y^2}{3}}^{2+\sqrt{1+y}} f(x,y)dxdy +$$
$$+ \int_{-1}^0 \int_{2-\sqrt{1+y}}^{2+\sqrt{1+y}} f(x,y)dxdy$$

■

Exercício 3 *Desenhando o conjunto B, obtemos a seguinte figura*



Assim, segue-se que a área do conjunto B é dada por

$$\iint_B dxdy =$$

$$= \int_1^2 \int_{4/(3x)}^{(-3x^2+7x)/3} dydx$$

$$= \int_1^2 y \Big|_{4/(3x)}^{(-3x^2+7x)/3} dydx$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{-3x^2+7x}{3} - \frac{4}{3x} \right) dx$$

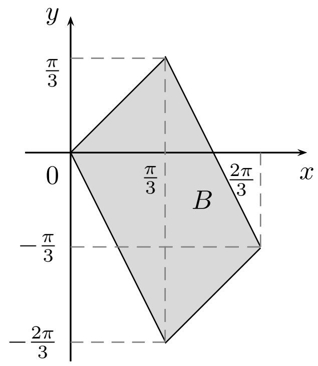
$$= \frac{1}{3} \int_1^2 \left(-3x^2 + 7x - \frac{4}{x} \right) dx$$

$$= \frac{1}{3} \left(-x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 4\ln x \right) \Big|_1^2$$

$$= \frac{7 - 8\ln 2}{6}$$

■

Exercício 4 *Desenhando o conjunto B obtemos a* *seguinte figura*



para calcularamos a integral em questão, usaremos a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = 2x + y \end{cases}$$

de onde segue-se que

$$\begin{cases} x = \dfrac{u+v}{3} \\ \\ y = \dfrac{-2u+v}{3} \end{cases}$$

e

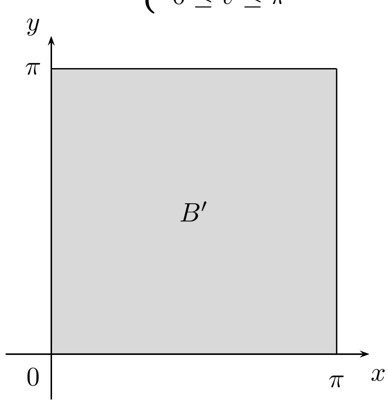
$$|J| = \left\| \begin{matrix} \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \\ \\ -\dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \end{matrix} \right\| = \frac{1}{3}$$

Observe que, nestas novas variáveis, as fronteiras do conjunto B tornam-se

$$\begin{array}{lll} y = x & \Rightarrow x - y = 0 & \Rightarrow u = 0 \\ y = x - \pi & \Rightarrow x - y = \pi & \Rightarrow u = \pi \\ y = -2x & \Rightarrow 2x + y = 0 & \Rightarrow v = 0 \\ y = -2x + \pi & \Rightarrow 2x + y = \pi & \Rightarrow v = \pi \end{array}$$

ou seja, B é transformado no conjunto

$$B' = \begin{cases} 0 \leq u \leq \pi \\ \\ 0 \leq v \leq \pi \end{cases}$$



Portanto, segue-se que

$$\iint_B (2x+y)\cos(x-y)\,dxdy = \iint_{B'} \frac{1}{3} v\cos u\,dudv$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} v\cos u\,dvdu$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi} \frac{v^2}{2}\cos u \Big|_0^{\pi} du$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\pi^2}{2}\int_0^{\pi} \cos u\,du$$

$$= \frac{\pi^2}{6}\,\mathrm{sen}\,u \Big|_0^{\pi}$$

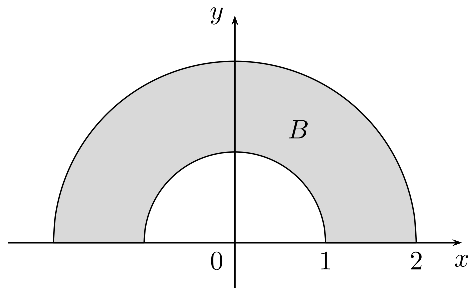
$$= 0$$

■

Exercício 5 *Considerando*

$$B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R} \,/\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq 0 \right\}$$

e desenhando-o, obtemos o seguinte desenho



Usando coordenadas polares, ou seja

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

teremos

$$|J| = r$$

e, nestas coordenadas o conjunto B é transformado no conjunto

$$B' : \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

Desta forma, como sabemos que

$$\delta(x,y) = k\sqrt{x^2+y^2},\ k \in \mathbb{R}$$

segue-se que

$$M(B) = \iint_B \delta(x,y)dxdy$$

$$= \iint_{B'} kr^2 dr d\theta$$

$$= k\int_0^\pi \int_1^2 r^2 dr d\theta$$

$$= k\int_0^\pi \left.\frac{r^3}{3}\right|_1^2 d\theta$$

$$= \frac{7k}{3}\int_0^\pi d\theta$$

$$= \frac{7k\pi}{3}$$

e disto, temos que

$$x_c = \frac{\iint_B x\delta(x,y)dxdy}{M(B)}$$

$$= \frac{3k\iint_B x\sqrt{x^2+y^2}dxdy}{7k\pi}$$

$$= \frac{3}{7\pi}\iint_B x\sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

$$= \frac{3}{7\pi}\iint_{B'} r\cos\theta r^2 dr\, d\theta$$

$$= \frac{3}{7\pi}\int_0^\pi \int_1^2 \cos\theta r^3 dr\, d\theta$$

$$= \frac{3}{7\pi}\int_0^\pi \cos\theta \left.\frac{r^4}{4}\right|_1^2 d\theta$$

$$= \frac{3}{7\pi}\frac{15}{4}\int_0^\pi \cos\theta d\theta$$

$$= 0$$

e

$$y_c = \frac{\iint_B y\delta(x,y)dxdy}{M(B)}$$

$$= \frac{3k\iint_B y\sqrt{x^2+y^2}dxdy}{7k\pi}$$

$$= \frac{3}{7\pi}\iint_B y\sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

$$= \frac{3}{7\pi}\iint_{B'} r\,\mathrm{sen}\,\theta r^2 dr\, d\theta$$

$$= \frac{3}{7\pi}\int_0^\pi \int_1^2 \mathrm{sen}\,\theta r^3 dr\, d\theta$$

$$= \frac{3}{7\pi}\int_0^\pi \mathrm{sen}\,\theta \left.\frac{r^4}{4}\right|_1^2 d\theta$$

$$= \frac{3}{7\pi}\frac{15}{4}\int_0^\pi \mathrm{sen}\,\theta d\theta$$

$$= \frac{3}{7\pi}\frac{15}{4}2$$

$$= \frac{45}{14\pi}$$

∎

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Profº. Edson

2ª Prova **1º Semestre** **2012**

Data: 17 de Outubro **Duração: 10:00 - 12:00**

Problema 1 *Calcule a integral*

$$\iiint_B 6xy\,dx\,dy\,dz$$

onde B é a região do espaço que está abaixo do plano $z = 1 + x + y$ e acima da região do plano xy limitada pelas curvas $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ e $x = 1$.

Problema 2 *Calcule a integral*

$$\iiint_B x\,dx\,dy\,dz$$

onde B é a região do espaço delimitada pelos planos $z = 0$ e $z = x + y + 3$ e pelos cilindros $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 9$.

Problema 3 *Calcule a massa do corpo homogêneo delimitado pelo plano xz e os hemisférios $y = \sqrt{9 - x^2 - z^2}$ e $y = \sqrt{16 - x^2 - z^2}$.*

Problema 4 *Calcule as integrais*

a). $\int_\gamma (x^2 + y^2)dx - xdy$ *onde γ é uma curva sobre a circunferência $x^2 + y^2 = 1$ com início no ponto $(1, 0)$ e final no ponto $(0, 1)$ e com sentido de percurso anti-horário;*

b). $\int_\gamma yzdx - xzdy + xydz$ *onde $\gamma(t) = (e^t, e^{3t}, e^{-t})$ com $0 \leq t \leq 1$.*

Problema 5 *Suponha que uma partícula se mova através do campo de forças*

$$\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j}$$

do ponto $(0, 0)$ para o ponto $(1, 0)$, ao longo da curva $\gamma(t) = (t, \lambda t(1 - t))$. Para qual valor de λ o trabalho realizado pelo campo de forças, ao realizar este deslocamento, será igual a 1?

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof$^{\text{o}}$. Edson

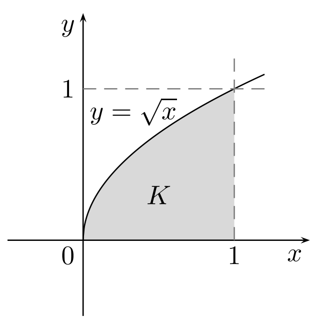
1º Semestre

Gabarito 2ª Prova **2012**
Data: Sexta-feira, 19 de Outubro **Turma 13**

Exercício 1 *Sabemos que **B** é a região do espaço que está abaixo do plano $z = 1 + x + y$ e acima da região do plano xy limitada pelas curvas $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ e $x = 1$. Assim, podemos expressar a região **B** da seguinte maneira:*

$$B : \begin{cases} 0 \le z \le 1 + x + y \\ (x, y) \in K \end{cases}$$

*onde **K** é a região esboçada abaixo:*



ou seja

$$K : \begin{cases} 0 \le y \le \sqrt{x} \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

portanto, seque-se que

$$\iiint_B 6xy\,dx\,dy\,dz = \iint_K \int_0^{1+x+y} 6xy\,dz\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} \int_0^{1+x+y} 6xy\,dz\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} 6xyz\Big|_0^{1+x+y} dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} 6xy(1 + x + y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} (6xy + 6x^2y + 6xy^2)dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left(3xy^2 + 3x^2y^2 + 2xy^3\right)\Big|_0^{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_0^1 \left(3x^2 + 3x^3 + 2x^{\frac{5}{2}}\right) dx$$

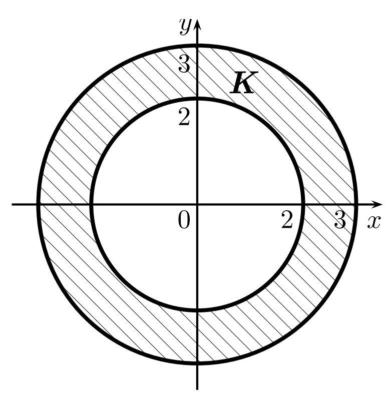
$$= \frac{65}{28}$$

■

Exercício 2 *Observe que **B** pode ser expresso da seguinte forma*

$$B : \begin{cases} 0 \le z \le x + y + 3 \\ (x, y) \in K \end{cases}$$

*onde um esboço de **K** pode ser dado por*



Logo, usando coordenadas cilíndricas, ou seja

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\,\text{sen}\,\theta$$
$$z = z$$

cujo jacobiano é

$$|J| = r$$

poderemos expressar o conjunto $\boldsymbol{B}$ *da seguinte maneira*

$$B : \begin{cases} 2 \leq r \leq 3 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq r(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta) + 3 \end{cases}$$

e, com isto, segue-se que

$$\iiint_B x\,dx\,dy\,dz = \int_2^3\int_0^{2\pi}\int_0^{r(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)+3} r\cdot r\cos\theta\,dz\,d\theta\,dr$$

$$= \int_2^3\int_0^{2\pi} r^2\cos\theta\, z\Big|_0^{r(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)+3} d\theta\,dr$$

$$= \int_2^3\int_0^{2\pi} r^2\cos\theta\,[r(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)+3]d\theta\,dr$$

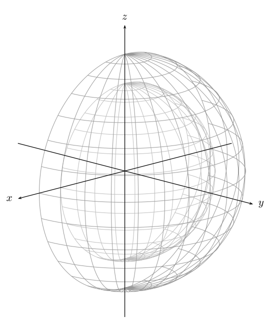
$$= \int_2^3 \pi r^3 dr$$

$$= \frac{\pi r^4}{4}\Big|_2^3$$

$$= \frac{65}{4}\pi$$

■

Exercício 3 *Um esboço do objeto dado no problema é dado pela seguinte figura*



de modo que, usando coordenadas esféricas, ou seja

$$x = \rho\operatorname{sen}\varphi\cos\theta$$
$$y = \rho\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta$$
$$z = \rho\cos\varphi$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \rho^2\operatorname{sen}\varphi$$

Podemos expressar este objeto assim

$$C : \begin{cases} 3 \leq \rho \leq 4 \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

Como o corpo é homogêneo, podemos considerar sua densidade dada por

$$\delta(x, y, z) = k,\ k \in \mathbb{R}$$

Portanto, segue-se que sua massa M é

$$M = \iiint_C \delta(x, y, z)dx\,dy\,dz$$

$$= \int_3^4\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} k\rho^2\operatorname{sen}\varphi d\theta\,d\varphi\,d\rho$$

$$= \int_3^4\int_0^{\pi} k\pi\rho^2\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi\,d\rho$$

$$= \int_3^4 -k\pi\rho^2\cos\varphi\Big|_0^{\pi} d\rho$$

$$= \int_3^4 2k\pi\rho^2 d\rho$$

$$= \frac{74k\pi}{3}$$

■

Exercício 4

a). A curva dada no problema pode ser parametrizada da seguinte maneira

$$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t),\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

Assim, se considerarmos

$$A = \int_\gamma (x^2 + y^2)dx - xdy$$

segue-se que

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)\operatorname{sen} t\,dt - \cos t\cos t\,dt$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} t + \cos^2 t)\,dt$$

$$= -1 - \frac{\pi}{4}$$

□

b). Procedendo de maneira semelhante ao que foi feito no item anterior, temos que

$$\gamma(t) = (e^t, e^{3t}, e^{-t}),\ 0 \leq t \leq 1$$

e, novamente se considerarmos

$$B = \int_\gamma yzdx - xzdy + xydz$$

teremos

$$B = \int_0^1 e^{3t}e^{-t}e^t dt - 3e^t e^{-t} e^{3t} dt - e^t e^{3t} e^{-t} dt$$

$$= \int_0^1 (e^{3t} - 3e^{3t} - e^{3t}) dt$$

$$= -\int_0^1 3e^{3t} dt$$

$$= 1 - e^3$$

■

Exercício 5 *Observe que, para a curva*

$$\gamma(t) = (t, \lambda t(1-t)),$$

a partícula estará no ponto $(0,0)$ quando $t = 0$ e em $(1,0)$ quando $t = 1$. Assim, o trabalho realizado pelo campo de forças

$$\mathbf{F}(x,y) = xy\mathbf{i} + (x-y)\mathbf{j}$$

neste deslocamento, é dado por

$$\tau = \int_\gamma \mathbf{F} d\gamma$$

$$= \int_0^1 \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

$$= \int_0^1 \mathbf{F}(t, \lambda t(1-t)) \cdot (1, (1-2t)\lambda) dt$$

$$= \int_0^1 (\lambda t^2(1-t), t - \lambda t(1-t)) \cdot (1, (1-2t)\lambda) dt$$

$$= \int_0^1 \left[t^3(-2\lambda^2 - \lambda) + t^2(3\lambda^2 - \lambda) - t(\lambda^2 - \lambda)\right] dt$$

$$= -\frac{\lambda}{12}$$

Assim, para que tenhamos o trabalho relizado neste deslocamento, igual a 1, devemos ter então que

$$\lambda = -12$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof$^{\text{o}}$. Edson

3ª Prova **1º Semestre** **2012**

Data: 14 de Novembro **Duração: 10:00 - 12:00**

Problema 1 *Calcule a área da parte da superfície* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ *compreendida entre os planos* $x + y = 1$, $x + y = 2$, $x = 0$ *e* $y = 0$.

Problema 2 *Encontre a massa da lâmina que é a porção da superfície* $y^2 = 4 - z$ *entre os planos* $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$ *e* $y = 3$ *se a desensidade desta lâmina for* $\delta(x, y, z) = y$.

Problema 3 *Calcule o fluxo de* $\mathbf{F}$ *através da superfície* σ *na direção da normal exterior* $\mathbf{n}$, *onde*

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$$

e σ *é a superfície do sólido delimitado pelos gráficos de* $z = x^2 + y^2$ *e* $z = 4$.

Problema 4 *Calcule*

$$\iint_\sigma x^2 z^2 ds$$

onde σ *é a metade superior do cilindro* $x^2 + z^2 = 4$ *entre* $y = 0$ *e* $y = 1$.

Problema 5 *Considere* $\mathbf{F}(x, y, z) = xy^2\vec{i} + yz^2\vec{j} + zx^2\vec{k}$ *e* σ *a região delimitada pelo triângulo de vértices* $(1, 0, 0), (0, 2, 0)$ *e* $(0, 0, 3)$. *Calcule*

$$\iint_\sigma \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \vec{n}\, ds$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^o. Edson

1^o Semestre

Gabarito 3ª Prova **2012**
Data: Quinta-feira, 15 de Novembro **Turma 13**

Exercício 1 *A superfície em questão pode ser parametrizada da seguinte forma*

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{u^2+v^2} \end{cases}, (u,v) \in \Omega$$

onde

$$\Omega = \{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \big| \, 1 \leq u+v \leq 2, u \geq 0, v \geq 0 \}$$

Assim, segue-se que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) = \left(1, 0, \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) = \left(0, 1, \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)$$

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) \right\| = \sqrt{2}$$

Portanto, a área desta superfície é dada por

$$\begin{aligned} A &= \iint_\sigma ds \\ &= \iint_\Omega \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) \right\| du\, dv \\ &= \sqrt{2} \iint_\Omega du\, dv \\ &= \sqrt{2} \cdot \textbf{Área}(\Omega) \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Uma parametrização possível para a superfície em questão é dada por*

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 4 - v^2 \end{cases}, (u,v) \in \Omega$$

sendo

$$\Omega = \{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \big| \, 0 \leq u \leq 3, 0 \leq v \leq 3 \}$$

Assim, segue-se que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) = (1,0,0)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) = (0,1,-2v)$$

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) \right\| = \sqrt{4v^2+1}$$

e, a massa desta lâmina é dada por

$$\begin{aligned} M &= \iint_\sigma \delta(x,y,z) ds \\ &= \iint_\sigma y ds \\ &= \iint_\Omega v \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) \right\| du\, dv \\ &= \int_0^3 \int_0^3 v\sqrt{4v^2+1} dv\, du \\ &= \frac{1}{4}\left(\sqrt{37^3} - 1\right) \end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Usando o* ***teorema da Divergência de Gauss****, temos que*

$$\iint_\sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iiint_\mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{F}\, dx\, dy\, dz$$

onde ***B*** *é o sólido delimitado pelos gráficos de* $z = x^2 + y^2$ *e* $z = 4$*, ou seja*

$$\mathbf{B} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \big| \, x^2+y^2 \leq z \leq 4 \}$$

Assim, segue-se que

$$\iint_\sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \iiint_{\mathbf{B}} dx\,dy\,dz$$

$$= \iint_{\mathbf{K}}\int_{x^2+y^2}^{4} dz\,dx\,dy$$

$$= \iint_{\mathbf{K}} \left[4-(x^2+y^2)\right] dx\,dy$$

onde

$$\mathbf{K} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \big| \, x^2+y^2\le 4\}$$

Usando coordenadas polares, considere

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}, \ |J| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = r$$

*O conjunto **K** é transformado no conjunto*

$$\mathbf{K}' : \begin{cases} 0\le r\le 2 \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$$

e, disto segue-se que

$$\iint_\sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \iint_{\mathbf{K}} \left[4-(x^2+y^2)\right] dx\,dy$$

$$= \iint_{\mathbf{K}'} \left(4-r^2\right) r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^2\int_0^{2\pi} \left(4-r^2\right) r\,d\theta\,dr$$

$$= 8\pi$$

■

Exercício 4 *A superfície dada possui parametrização dada por*

$$\sigma : \begin{cases} x = 2\cos u \\ y = v \\ z = 2\,\mathrm{sen}\,u \end{cases}, \quad \begin{matrix} 0\le u\le\pi \\ 0\le v\le 1 \end{matrix}$$

Logo

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) = (-2\,\mathrm{sen}\,u, 0, 2\cos u)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v) = (0,1,0)$$

$$\left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v)\right\| = 2$$

Assim, temos que

$$\iint_\sigma x^2z^2ds = \iint_\Omega 32\cos^2 u\,\mathrm{sen}^2 u\,du\,dv$$

onde

$$\Omega = \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \big| \, 0\le u\le\pi, 0\le v\le 1\}$$

Ou seja,

$$\iint_\sigma x^2z^2ds = 32\iint_\Omega \cos^2 u\,\mathrm{sen}^2 u\,du\,dv$$

$$= 32\int_0^\pi\int_0^1 \cos^2 u\,\mathrm{sen}^2 u\,dv\,du$$

$$= 4\pi$$

■

Exercício 5 *Pelo **teorema de Stokes**, temos que*

$$\iint_\sigma rot\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \int_\Gamma \mathbf{F}\cdot dr$$

onde Γ é a curva fronteira da região delimitada pelo triângulo de vértices $(1,0,0), (0,2,0)$ e $(0,0,3)$.

Uma parametrização possível para esta curva pode ser dada da seguinte maneira

$$\Gamma = \gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3$$

onde

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = 1-t \\ y = 2t \\ z = 0 \end{cases}, 0\le t\le 1$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 2-2t \\ z = 3t \end{cases}, 0\le t\le 1$$

$$\gamma_3 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 3-3t \end{cases}, 0\le t\le 1$$

Portanto

$$\iint_\sigma rot\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \int_\Gamma \mathbf{F}\cdot dr$$

$$= \int_{\gamma_1}\mathbf{F}\cdot dr + \int_{\gamma_2}\mathbf{F}\cdot dr + \int_{\gamma_3}\mathbf{F}\cdot dr$$

Resolvendo cada uma das integrais de forma separada, teremos

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot dr = \int_0^1 \mathbf{F}(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t)dt$$

$$= \int_0^1 \mathbf{F}(1-t, 2t, 0) \cdot (-1, 2, 0)dt$$

$$= 4\int_0^1 \left(t^3 - t^2\right) dt$$

$$= -\frac{1}{3}$$

$$\int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot dr = \int_0^1 \mathbf{F}(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t)dt$$

$$= \int_0^1 \mathbf{F}(0, 2-2t, 3t) \cdot (0, -2, 3)dt$$

$$= 36\int_0^1 \left(t^3 - t^2\right) dt$$

$$= -3$$

$$\int_{\gamma_3} \mathbf{F} \cdot dr = \int_0^1 \mathbf{F}(\gamma_3(t)) \cdot \gamma_3'(t)dt$$

$$= \int_0^1 \mathbf{F}(t, 0, 3-3t) \cdot (1, 0, -3)dt$$

$$= 9\int_0^1 \left(t^3 - t^2\right) dt$$

$$= -\frac{3}{4}$$

Logo, temos finalmente que

$$\iint_\sigma rot\, \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = -\frac{1}{3} - 3 - \frac{3}{4}$$

$$= -\frac{49}{12}$$

$\blacksquare$

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof$^{\text{o}}$. Edson

Prova Final **1$^{\text{o}}$ Semestre** **2012**

Data: 21 de Novembro **Duração: 10:00 - 12:00**

Problema 1 *Determine o volume do sólido que está sob o parabolóide* $z = x^2 + y^2$*, acima do plano* xy*, e dentro do cilindro* $x^2 + y^2 = 2x$*.*

Problema 2 *Determine a área da parte da superfície* $z = x^2 + y$ *que está acima do triângulo com vértices* $(0,0), (1,0)$ *e* $(0,2)$*.*

Problema 3 *Determine o trabalho realizado pelo campo de força* $\mathbf{F}(x,y) = x\mathbf{i} + (y+2)\mathbf{j}$ *para movimentar um objeto sobre um arco da ciclóide* $\mathbf{r}(t) = (t - \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Problema 4 *Calcule*

$$\int_\gamma xe^{-2x}dx + (x^4 + 2x^2y^2)dy,$$

onde γ *é a fronteira da região entre as circunferências* $x^2 + y^2 = 1$ *e* $x^2 + y^2 = 4$*.*

Problema 5 *Calcule*

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot dr$$

onde γ *é a fronteira da parte do plano* $2x + y + 2z = 2$ *no primeiro octante, orientada no sentido anti-horário quando visto de cima e* $\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$*.*

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^{o}. Edson

1^{o} Semestre

Gabarito Prova Final **2012**
Data: Quinta-feira, 22 de Novembro **Turma 13**

Exercício 1 *Observe que a equação do cilindro dado pode ser reescrita da seguinte maneira*

$$x^2+y^2=2x \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=1$$

Logo, o volume do sólido em questão é dado por

$$V=\iiint_B dx\,dy\,dz$$

onde

$$B=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \middle| (x-1)^2+y^2\leq 1,\ 0\leq z\leq x^2+y^2\right\}$$

Ou seja

$$V=\iint_K\int_0^{x^2+y^2} dy\,dx\,dy$$

$$=\iint_K (x^2+y^2)dx\,dy$$

onde

$$K=\left\{\ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle|\ (x-1)^2+y^2\leq 1\right\}$$

Usando coordenadas polares, considere

$$\begin{cases} x-1=r\cos\theta \\ \quad\ y=r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

e observe que

$$|J|=r$$

e, o conjunto K é transformado por está mudança, no conjunto

$$K':\begin{cases} 0\leq\theta\leq 2\pi \\ 0\leq r\leq 1 \end{cases}$$

e disto, segue-se que

$$V=\iint_K (x^2+y^2)dx\,dy$$

$$=\iint_{K'}\left[(1+r\cos\theta)^2+r^2\mathrm{sen}^2\theta\right]r\,dr\,d\theta$$

$$=\iint_{K'}\left(1+2r\cos\theta+r^2\right)r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r+2r^2\cos\theta+r^3)\,dr\,d\theta$$

$$=\frac{3}{2}\pi$$

■

Exercício 2 *Uma parametrização possível para a superfície dada é*

$$\sigma:\begin{cases} x=u \\ y=v \\ z=u^2+v \end{cases},(u,v)\in K$$

onde K é a região delimitada pelo triângulo de vértices $(0,0),(1,0)$ e $(0,2)$, ou seja

$$K:\begin{cases} 0\leq u\leq 1 \\ 0\leq v\leq -2u+2 \end{cases}$$

Segue-se portanto, que

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v)=(1,0,2u)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v)=(0,1,1)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v)=(-2u,-1,1)$$

$$\left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v)\right\|=\sqrt{4u^2+2}$$

donde, temos que, a área procurada é dada por

$$A = \iint_\sigma ds$$

$$= \iint_K \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) \right\| du\, dv$$

$$= \iint_K \sqrt{4u^2+2} du\, dv$$

$$= \int_0^1 \int_0^{-2u+2} \sqrt{4u^2+2} dv\, du$$

$$= \int_0^1 (-2u+2)\sqrt{4u^2+2} du$$

$$= \ln\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) + \frac{1}{3}\sqrt{2}$$

■

Exercício 3 *O trabalho realizado pelo campo*

$$\mathbf{F}(x,y) = x\mathbf{i} + (y+2)\mathbf{j}$$

para movimentar um objeto sobre um arco de ciclóide dado por

$$\mathbf{r}(t) = (t - \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (1-\cos t)\mathbf{j},\ 0 \le t \le 2\pi$$

pode ser calculado através da integral de linha

$$\tau = \int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(t-\operatorname{sen} t, 1-\cos t)\cdot(1-\cos t, \operatorname{sen} t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (t-\operatorname{sen} t, 3-\cos t)\cdot(1-\cos t, \operatorname{sen} t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (t + 2\operatorname{sen} t - t\cos t)\ dt$$

$$= 2\pi^2$$

□

Uma outra maneira de resolver este problema seria, observarmos que

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(y+2) - \frac{\partial}{\partial y}(x) = 0$$

e

$$\textbf{\textit{Domínio}}(\mathbf{F}) = \mathbb{R}^2$$

O que nos permite afirmar que $\mathbf{F}$ *é um campo conservativo em* $\mathbb{R}^2$*, ou seja, existe uma função* $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$\nabla\varphi(x,y) = \mathbf{F}(x,y)$$

o que é equivalente a dizer que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = x \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = y+2 \end{cases}$$

donde, resolvendo este sistema de equações, obtemos

$$\varphi(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + 2y + c$$

onde $c \in \mathbb{R}$*. Agora, sendo* F *um campo conservativo, a integral para o cálculo do trabalho realizado para mover um objeto sobre uma curva, depende apenas dos pontos extremos desta curva. Assim, segue-se que*

$$\tau = \int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$= \varphi(\mathbf{r}(2\pi)) - \varphi(\mathbf{r}(0))$$

$$= \varphi(2\pi, 0) - \varphi(0,0)$$

$$= 2\pi^2$$

■

Exercício 4 *Usando o* ***teorema de Green****, temos que*

$$I = \int_\gamma xe^{-2x}\, dx + (x^4 + 2x^2y^2)\, dy$$

$$= \iint_K \left[\frac{\partial}{\partial x}(x^4+2x^2y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(xe^{-2x})\right] dx\, dy$$

$$= \iint_K 4x(x^2+y^2) dx\, dy$$

onde

$$K = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, 1 \le x^2 + y^2 \le 4 \right\}$$

Usando coordenadas polares,

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

temos que

$$|J| = r$$

e, o conjunto K será transformado no conjunto

$$K' : \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 1 \le r \le 2 \end{cases}$$

Portanto

$$I = \iint_K 4x(x^2+y^2)dx\,dy$$

$$= \iint_{K'} 4r\cos\theta\, r^2 r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_1^2 4\cos\theta\, r^4\, dr\, d\theta$$

$$= 0$$

■

Exercício 5 *Observe que*

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & xyz \end{vmatrix}$$

$$= (xz, -yz, 0)$$

*O **teorema de Stokes** enuncia que*

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\gamma = \iint_\sigma \mathrm{rot}\,\mathbf{F}\,ds$$

onde, em nosso caso, σ é a região do plano $2x+y+2z=2$ no primeiro octante. Uma parametrização possível seria

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \frac{1}{2}(2-2u-v) \end{cases}, (u,v) \in K$$

onde

$$K : \begin{cases} 0 \le u \le 1 \\ 0 \le v \le -2u+2 \end{cases}$$

Portanto

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) = (1,0,-1)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v) = (0,1,-\tfrac{1}{2})$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v) = (1,\tfrac{1}{2},1)$$

$$\left\| \frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v) \right\| = \frac{3}{2}$$

Por fim, segue-se que

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\gamma = \iint_\sigma \mathrm{rot}\,\mathbf{F}\,ds$$

$$= \iint_K \mathrm{rot}\,\mathbf{F}(\sigma(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial\sigma}{\partial u} \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}\right) du\,dv$$

$$= \iint_K \mathrm{rot}\,\mathbf{F}(u,v,\frac{2-2u-v}{2}) \cdot (1,\frac{1}{2},1) du\,dv$$

$$= \frac{1}{4}\iint_K \left(-4u^2+4u+v^2-2v\right) du\,dv$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1\int_0^{-2u+2} \left(-4u^2+4u+v^2-2v\right) dv\,du$$

$$= 0$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof$^{\text{o}}$. Edson

1ª Prova **1º Semestre** **2013**

Data: 22 de Julho **Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Calcule as integrais*

a). $\displaystyle\int_1^4\int_{x^2}^{x}\sqrt{\frac{y}{x}}\,dydx;$

b). $\displaystyle\int_0^3\int_0^x x^2e^{xy}\,dydx.$

Problema 2 *Inverta a ordem de integração:*

a). $\displaystyle\int_1^e\int_0^{\ln x} f(x,y)\,dydx;$

b). $\displaystyle\int_0^1\int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dxdy.$

Problema 3 *Usando intregral dupla, calcule a área da região plana compreendida entre curvas* $y^2 = 9 - x$ *e* $y^2 = 9 - 9x$.

Problema 4 *Calcule o volume do sólido delimitado pelo cilindro* $4x^2 + y^2 = 9$ *e pelos planos* $z = 0$ *e* $z = y + 3$.

Problema 5 *Determine a massa e o centro de massa da lâmina que tem a forma da região no primeiro quadrante, delimitada pelas curvas* $x^2 = 8y$, $y = 2$ *e pelo eixo* y, *cuja densidade em cada ponto* (x, y) *é diretamente proporcional à distância deste ponto à reta* $y = -1$.

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof$^{\text{o}}$. Edson

1$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito 1$^{\text{a}}$ Prova **2013**
Data: Sexta-feira, 2 de Agosto **Turma M3**

Exercício 1

a).

$$\int_1^4\int_{x^2}^{x}\sqrt{\frac{y}{x}}dy\,dx = \int_1^4\int_{x^2}^{x}\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}dy\,dx$$

$$= \int_1^4 \frac{2}{3}\frac{\sqrt{y^3}}{\sqrt{x}}\bigg|_{x^2}^{x} dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_1^4 \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{x^6}}{\sqrt{x}}dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_1^4 \left(x - x^{\frac{5}{2}}\right)dx$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{7}\sqrt{x^7}\right)\bigg|_1^4$$

$$= \frac{2}{3}\left(-\frac{200}{7} - \frac{3}{14}\right)$$

$$= -\frac{403}{21}$$

□

b).

$$\int_0^3\int_0^x x^2e^{xy}dy\,dx = \int_0^3 x^2\frac{1}{x}e^{xy}\bigg|_0^x dx$$

$$= \int_0^3\left(xe^{x^2} - x\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{x^2} - x^2\right)\bigg|_0^3$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^9 - 9\right) - \frac{1}{2}$$

$$\int_0^3\int_0^x x^2e^{xy}dy\,dx = \frac{e^9}{2} - 5$$

■

Exercício 2

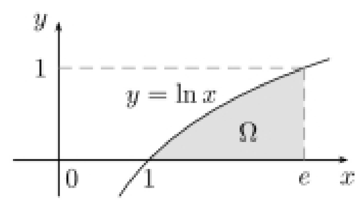
a). *Desejamos inverter a ordem de integração da seguinte integral*

$$\int_1^e\int_0^{\ln x} f(x,y)dy\,dx$$

Para isto, observe que o domínio de integração é

$$\Omega : \begin{cases} 1 \le x \le e \\ 0 \le y \le \ln x \end{cases}$$

cujo gráfico pode ser esboçado da seguinte maneira



Observe porém, que o conjunto Ω pode também ser descrito da seguinte maneira

$$\Omega : \begin{cases} e^y \le x \le e \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

Ou seja,

$$\int_1^e\int_0^{\ln x} f(x,y)dy\,dx = \int_0^1\int_{e^y}^{e} f(x,y)dx\,dy$$

□

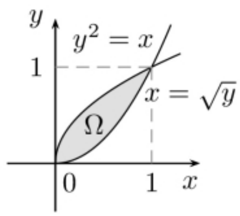
b). *Desejamos agora, inverter a ordem de integração da integral*

$$\int_0^1\int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx\,dy$$

De modo semelhante ao que foi feito no item anterior, observe que o domínio de integração é o conjunto

$$\Omega : \begin{cases} y^2 \le x \le \sqrt{y} \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

cujo esboço é dado pela seguinte figura



Observe que o conjunto Ω *pode ser descrito também, da seguinte forma*

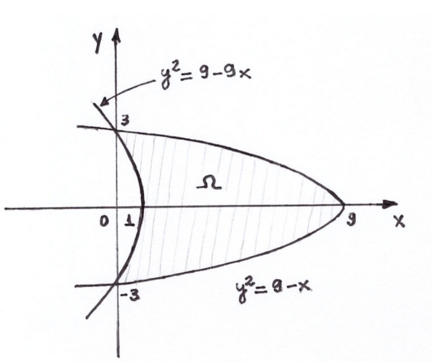
$$\Omega : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le \sqrt{x} \end{cases}$$

Ou seja

$$\int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx\,dy = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy\,dx$$

■

Exercício 3 *A região plana* Ω *compreendida entre as curvas* $y^2 = 9 - x$ *e* $y^2 = 9 - 9x$ *pode ser visualizada no seguinte esboço*



Observe então, que a região Ω *pode ser descrita do seguinte modo*

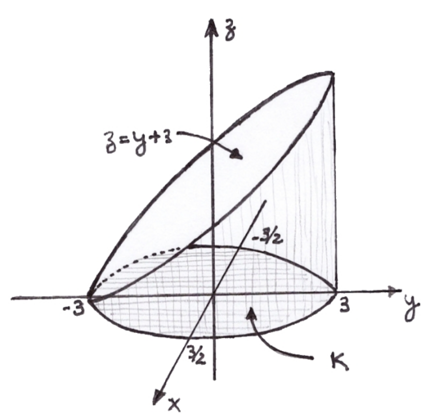
$$\Omega : \begin{cases} \dfrac{9-y^2}{9} \le x \le 9 - y^2 \\ -3 \le y \le 3 \end{cases}$$

Portanto

$$\begin{aligned} Área(\Omega) &= \iint_\Omega dx\,dy \\ &= \int_{-3}^{3}\int_{\frac{9-y^2}{9}}^{9-y^2} dx\,dy \\ &= \int_{-3}^{3} x \Big|_{\frac{9-y^2}{9}}^{9-y^2} dy \\ &= \frac{1}{9}\int_{-3}^{3} \left(72 - 8y^2\right) dy \\ &= \frac{1}{9}\left(72y - \frac{8}{3}y^3\right)\Big|_{-3}^{3} \\ &= \frac{144+144}{9} \\ &= 32 \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Observe que o sólido* Ω *delimitado pelo cilindro* $4x^2 + y^2 = 9$ *e os planos* $z = 0$ *e* $z = y + 3$ *possui o seguinte esboço*



Assim, segue-se que o volume V *deste sólido é dado por*

$$V = \iint_K (y+3)dx\,dy$$

onde K *é o conjuntos dos pontos* (x,y) *tais que*

$$4x^2 + y^2 \le 9 \Leftrightarrow \left(\frac{2x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 \le 1$$

Usando coordenadas polares, tome

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} r\cos\theta \\ \\ y = 3r \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{3}{2}\cos\theta & -\frac{3}{2}r\operatorname{sen}\theta \\ 3\operatorname{sen}\theta & 3r\cos\theta \end{vmatrix} = \frac{9}{2}r$$

Assim, neste novo sistema de coordenadas, o conjunto K pode ser descrito do seguinte modo

$$K : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$$

e, portanto, segue-se que

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (3r\operatorname{sen}\theta + 3)\,\frac{9}{2} r\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{27}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(r^2\operatorname{sen}\theta + r\right) dr\,d\theta$$

$$= \frac{27}{2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3}r^3\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2}r^2\right)\Bigg|_0^1 d\theta$$

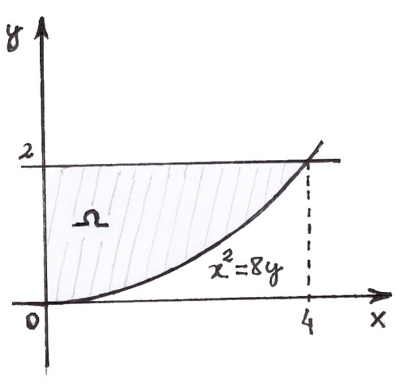
$$= \frac{27}{2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3}\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2}\right) d\theta$$

$$= \frac{27}{2}\left(-\frac{1}{3}\cos\theta + \frac{1}{2}\theta\right)\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{27\pi}{2}$$

■

Exercício 5 *Observe que a lâmina que tem a forma da região do primeiro quadrante, delimitada pelas curvas $x^2 = 8y$, $y = 2$ e pelo eixo y possui o seguinte esboço*



onde

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ \dfrac{x^2}{8} \leq y \leq 2 \end{cases}$$

A densidade dessa lâmina em cada ponto (x, y) é diretamente proporcional à distância deste ponto à reta $y = -1$, ou seja

$$\delta(x, y) = k(y + 1)$$

Assim, a massa dessa lâmina será

$$M = \iint_\Omega \delta(x, y)dx\,dy$$

$$= \int_0^4\int_{\frac{x^2}{8}}^2 k(y+1)dy\,dx$$

$$= k\int_0^4 \left(\frac{1}{2}y^2 + y\right)\Bigg|_{\frac{x^2}{8}}^2 dx$$

$$= k\int_0^4 \left(4 - \frac{x^4}{128} - \frac{x^2}{8}\right) dx$$

$$= k\left(4x - \frac{x^5}{640} - \frac{x^3}{24}\right)\Bigg|_0^4$$

$$= \frac{176k}{15}$$

E, o centro de massa, será (x_c, y_c) onde

$$x_c = \frac{1}{M}\iint_\Omega x\delta(x, y)dx\,dy$$

$$= \frac{15}{176k}\iint_\Omega kx(y+1)dx\,dy$$

$$= \frac{15}{176}\iint_\Omega x(y+1)dx\,dy$$

$$= \frac{15}{176}\int_0^4\int_{\frac{x^2}{8}}^2 x(y+1)dy\,dx$$

$$= \frac{15}{176}\,\frac{56}{3}$$

$$= \frac{35}{22}$$

e

$$\begin{aligned}
y_c &= \frac{1}{M}\iint_\Omega y\delta(x,y)dx\,dy \\
&= \frac{15}{176k}\iint_\Omega ky(y+1)dx\,dy \\
&= \frac{15}{176}\iint_\Omega y(y+1)dx\,dy \\
&= \frac{15}{176}\int_0^4\int_{\frac{x^2}{8}}^2 y(y+1)dy\,dx \\
&= \frac{15}{176}\,\frac{544}{35} \\
&= \frac{102}{77}
\end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof°. Edson

2ª Prova | **1° Semestre** | **2013**

Data: 04 de Setembro | **Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Calcule as integrais*

a). $\displaystyle\int_0^2\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}}\int_0^{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx;$

b). $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}\int_y^{\sqrt{4-y^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz\,dx\,dy.$

Problema 2 *Um sólido homogênio tem a forma da região delimitada pela superfície*

$$x^2-y^2+z^2=0$$

e o plano $y=3$. *Calcule o momento de inércia deste sólido, em relação ao eixo-y.*

Problema 3 *Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças definido por*

$$F(x,y,z)=\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ao mover uma partícula ao longo do segmento de reta que vai do ponto $(3,0,0)$ *ao ponto* $(3,0,4)$.

Problema 4 *Determine a massa de um arame com formato da hélice* $\gamma(t)=(t,\cos t,\operatorname{sen} t)$, $0\le t\le 2\pi$, *sendo sua densidade em qualquer ponto, igual ao quadrado da distância do ponto à origem*

Problema 5 *Calcule a integral*

$$\int_\gamma x^2z\,dx-yx^2\,dy+3\,dz$$

onde γ *é a curva fechada, que descreve o triângulo de vértices* $(0,0,0),(1,1,0)$ *e* $(1,1,1)$, *tendo seu ponto inicial e final em* $(0,0,0)$.

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^o. Edson

1^o Semestre

Gabarito 2ª Prova **2013**
Data: Terça-feira, 18 de Fevereiro **Turma M3**

Exercício 1

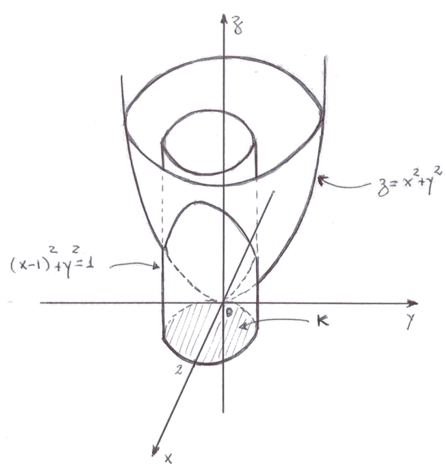
a). *Desejamos calcular a integral*

$$I = \int_0^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^{x^2+y^2} \sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx$$

Observe inicialmente que, seu domínio de integração é dado por

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ -\sqrt{2x-x^2} \leq y \leq \sqrt{2x-x^2} \\ 0 \leq z \leq x^2+y^2 \end{cases}$$

e, realizando um esboço desta região obtemos a seguinte figura



Usando coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| = r,$$

percebe-se que a região em questão pode ser representada da seguinte forma

$$\Omega : \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 2\cos\theta \\ 0 \leq z \leq r^2 \end{cases}$$

Portanto,

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} \int_0^{r^2} r \cdot r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} r^2 z\Big|_0^{r^2} dr\,d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} r^4 dr\,d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^5}{5}\Big|_0^{2\cos\theta} d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{32\cos^5\theta}{5} d\theta$$

$$= \frac{32}{5}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2\theta\right)^2 \cos\theta d\theta$$

$$= \frac{32}{5}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\text{sen}^2\theta\right)^2 \cos\theta d\theta$$

$$= \frac{32}{5}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos\theta - 2\text{sen}^2\theta\cos\theta + \text{sen}^4\theta\cos\theta\right) d\theta$$

$$= \frac{32}{5}\left(\text{sen}\,\theta - \frac{2}{3}\text{sen}^3\theta + \frac{1}{5}\text{sen}^5\theta\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{512}{75}$$

□

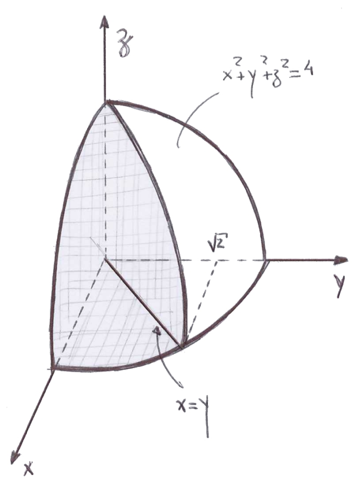
b). *Desejamos agora, calcular a integral*

$$I = \int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz\,dx\,dy$$

A região de integração é dada por

$$\Omega : \begin{cases} y \leq x \leq \sqrt{4-y^2} \\ 0 \leq y \leq \sqrt{2} \\ 0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2} \end{cases}$$

e, realizando um esboço desta, teremos a seguinte figura



Usando coordenadas esféricas,

$$\begin{cases} x = \rho \,\mathrm{sen}\, \varphi \cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{cases}$$

cujo jacobiano é dado por

$$\left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} \right| = \rho^2 \mathrm{sen}\,\varphi$$

esta mesma região, pode ser representada da seguinte forma

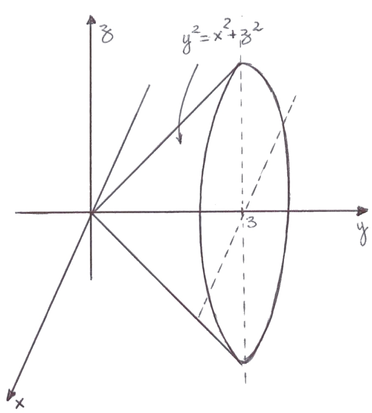
$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 2 \\ 0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \rho \cdot \rho^2 \mathrm{sen}\,\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^4}{4} \mathrm{sen}\,\varphi \Big|_0^2 d\varphi\, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\,\mathrm{sen}\,\varphi\, d\varphi\, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} -4\cos\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4 d\theta \\ &= \pi \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Fazendo um esboço da região dada, obtemos a seguinte figura*



Usando as coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = y \\ z = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

cujo jacobiano é dado por

$$\left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,y)} \right| = r$$

Podemos descrever esta região, da seguinte forma

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le 3 \\ r \le y \le 3 \end{cases}$$

Observe que a distância de um ponto (x, y, z) *ao eixo* y *é dado por*

$$d = \sqrt{x^2 + z^2}$$

Desta forma segue-se que, o momento de inércia deste sólido, quando girando em torno do eixo y, será

$$I = \iiint_\Omega d^2 dm$$

$$= \iiint_\Omega (x^2 + y^2) k \, dx \, dy \, dz$$

$$= k \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_r^3 r^2 \cdot r \, dy \, d\theta \, dr$$

$$= k \int_0^3 \int_0^{2\pi} r^3 y \Big|_r^3 d\theta \, dr$$

$$= k \int_0^3 \int_0^{2\pi} \left(3r^3 - r^4\right) d\theta \, dr$$

$$= k \int_0^3 2\pi \left(3r^3 - r^4\right) dr$$

$$= 2k\pi \left(\frac{3}{4} r^4 - \frac{r^5}{5}\right) \Big|_0^3$$

$$= \frac{243\pi k}{10}$$

■

Exercício 3 *O segmento de reta do ponto* $(3, 0, 0)$ *ao ponto* $(3, 0, 4)$*, pode ser parametrizado da seguinte forma*

$$\gamma(t) = (3, 0, 0) + [(3, 0, 4) - (3, 0, 0)]\, t$$

$$= (3, 0, 4t)$$

onde $0 \le t \le 1$*. Logo, o trabalho realizado pelo campo vetorial*

$$F(x, y, z) = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ao mover uma partícula ao longo do segmento dado, será

$$\tau = \int_\gamma F \cdot d\gamma$$

$$= \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

$$= \int_0^1 F(3, 0, 4t) \cdot (0, 0, 4) dt$$

$$= \int_0^1 \frac{16t}{(9 + 16t^2)^{\frac{3}{2}}} dt$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{16t^2 + 9}} \Big|_0^1$$

$$= -\frac{1}{5} + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{2}{15}$$

■

Exercício 4 *De acordo com o enunciado do problema, a densidade do arame num ponto* (x, y, z) *é dada por*

$$\delta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

e, sendo a forma do arame a hélice

$$\gamma(t) = (t, \cos t, \operatorname{sen} t), \; 0 \le t \le 2\pi$$

Segue-se que sua massa será

$$m = \int_\gamma \delta \, ds$$

$$= \int_0^{2\pi} \delta(\gamma(t)) \, \|\gamma'(t)\| \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \delta(t, \cos t, \operatorname{sen} t) \, \|(1, -\operatorname{sen} t, \cos t)\| \, dt$$

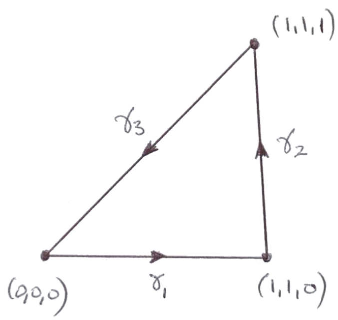
$$= \int_0^{2\pi} \left(t^2+1\right)\sqrt{2}dt$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{t^3}{3}+t\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{8\pi^3}{3}+2\pi\right)$$

■

Exercício 5 *Considere a curva γ composta pelos segmentos de reta γ_1, γ_2 e γ_3 conforme a figura abaixo*



A parametrização de cada um destes segmentos pode ser obtida da seguinte maneira

$$\gamma_1(t) = (0,0,0) + [(1,1,0)-(0,0,0)]\,t$$

$$= (t,t,0)$$

$$\gamma_2(t) = (1,1,0) + [(1,1,1)-(1,1,0)]t$$

$$= (1,1,t)$$

$$\gamma_3(t) = (1,1,1) + [(0,0,0)-(1,1,1)]t$$

$$= (1-t,1-t,1-t)$$

onde $0 \le t \le 1$. Portanto, segue-se que

$$I = \int_\gamma x^2zdx - yx^2dy + 3dz$$

$$= \int_{\gamma_1} x^2zdx - yx^2dy + 3dz + \int_{\gamma_2} x^2zdx - yx^2dy + 3dz + \int_{\gamma_3} x^2zdx - yx^2dy + 3dz$$

$$= \int_0^1 -t^3dt + \int_0^1 3dt + \int_0^1 \left[-(1-t)^3dt + (1-t)^3dt - 3dt\right]$$

$$= \int_0^1 -t^3dt$$

$$= -\frac{t^4}{4}\Big|_0^1$$

$$= -\frac{1}{4}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Coelgiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof$^{\text{o}}$. Edson

3ª Prova **1º Semestre** **2013**

Data: Sexta-feira, 27 de Setembro **Duração: 14:00 - 18:00**

Problema 1 *Calcule a integral*

$$\int_\gamma 2x\cos y\,dx - x^2 \operatorname{sen} y\,dy$$

onde $\gamma(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t)$ *com* $0 \leq t \leq 2\pi$.

Problema 2 *Calcule a integral*

$$\int_\gamma (6x+y)dx + (y+2x)dy$$

onde γ *é a curva fechada, orientada no sentido anti-horário, cujo traço corresponde à circunferência*

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$$

Problema 3 *Encontre a área da superfície* $x^2 - 2y - 2z = 0$ *que está acima do triângulo, no plano* xy*, limitado pelas retas* $x = 2$, $y = 0$ *e* $y = 3x$.

Problema 4 *Calcule o fluxo externo do campo vetorial*

$$\mathbf{F}(x,y,z) = x^2\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j} + 3xz\mathbf{k}$$

através da fronteira da região da esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ *que está no primeiro octante.*

Problema 5 *Calcule*

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\gamma$$

onde $\mathbf{F}(x,y,z) = y\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ *e* γ *é a fronteira do triângulo delimitado pela porção do plano* $x + y + z = 1$ *que está no primeiro octante.*

Boa sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof$^{\text{o}}$. Edson

1$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito 3ª Prova **2013**
Data: Quarta-feira, 2 de Outubro **Turma M3**

Exercício 1 *Inicialmente, observe que o campo vetorial*

$$F(x,y) = 2x\cos y\,\mathbf{i} - x^2\text{sen}\,y\,\mathbf{j}$$

é conservativo, uma vez que

$$\begin{aligned}\text{rot}\,\mathbf{F} &= \nabla \times F\\ &= 0\end{aligned}$$

e o domínio de $\mathbf{F}$ *é todo o* $\mathbb{R}^2$*, que é conexo. Além disto, perceba que a curva*

$$\gamma(t) = (\cos^3 t, \text{sen}^3 t),\ 0 \le t \le 2\pi$$

é fechada, dado que

$$\gamma(0) = (1,0) = \gamma(2\pi)$$

Assim, usando o ***Teorema de Green****, segue-se que*

$$\begin{aligned}\int_\gamma 2x\cos y\,dx - x^2\text{sen}\,y\,dy &= \iint_K \text{rot}\,\mathbf{F}\,dx\,dy\\ &= 0\end{aligned}$$

onde K *é o conjunto que compreende o interior de curva* γ*.* ∎

Exercício 2 *Desejamos calcular a integral*

$$I = \int_\gamma (6x+y)dx + (y+2x)dy$$

Como o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x,y) = (6x+y)\,\mathbf{i} + (y+2x)\,\mathbf{j}$$

está definido para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*, ou seja, o domínio de* $\mathbf{F}$ *é um conjunto conexo, e a curva* γ *é fechada, podemos aplicar o* ***Teorema de Green*** *e concluir que*

$$\begin{aligned}I &= \iint_K \left[\frac{\partial(y+2x)}{\partial x} - \frac{\partial(6x+y)}{\partial y}\right] dx\,dy\\ &= \iint_K (2-1)\,dx\,dy\\ &= \iint_K dx\,dy\\ &= \acute{A}rea(K)\end{aligned}$$

onde K *é o interior da curva* γ*, ou seja* K *é um círculo de raio 2. Logo*

$$\int_\gamma (6x+y)dx + (y+2x)dy = 4\pi$$

∎

Exercício 3 *Uma parametrização simples para a superfície em questão é*

$$\varphi : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \frac{1}{2}\left(u^2 - 2v\right) \end{cases} ,\ (u,v) \in K$$

onde o conjunto K*, pode ser descrito como*

$$K : \begin{cases} 0 \le u \le 2 \\ 0 \le v \le 3u \end{cases}$$

Portanto, a área desta superfície, pode ser calculada pela seguinte integral

$$\begin{aligned}A &= \iint_\varphi ds\\ &= \iint_K \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right\| du\,dv\end{aligned}$$

Usando a parametrização de φ, temos que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = (1, 0, u)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v} = (0, 1, -1)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v} = (-u, 1, 1)$$

e

$$\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right\| = \sqrt{u^2+2}$$

ou seja,

$$A = \iint_K \sqrt{u^2+2}\, du\, dv$$

$$= \int_0^2 \int_0^{3u} \sqrt{u^2+2}\, dv\, du$$

$$= \int_0^2 3u\sqrt{u^2+2}\, du$$

$$= 6\sqrt{6} - 2\sqrt{2}$$

■

Exercício 4 *Como trata-se do fluxo externo através da fronteira de uma região fechada do $\mathbb{R}^3$ e como o campo vetorial*

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\,\mathbf{i} - 2xy\,\mathbf{j} + 3xz\,\mathbf{k}$$

está definido em todo o $\mathbb{R}^3$, podemos usar o ***Teorema da Divergência de Gauss*** *e, concluir que o fluxo procurado será dado por*

$$\iint_\phi \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, ds = \iiint_\Omega \operatorname{div}\mathbf{F}\, dx\, dy\, dz \qquad (1)$$

onde ϕ é a porção da esfera $x^2+y^2+z^2 \leq 4$ que está no primeiro octante e Ω é o interior de ϕ. Usando coordenadas esféricas, podemos descrever o conjunto Ω da seguinte forma

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 2 \\ 0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

sendo

$$x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta$$

$$y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta$$

$$z = \rho \cos\varphi$$

e

$$\left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)}\right| = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi$$

Assim, voltando à equação (1), teremos

$$\iint_\phi \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, ds = \iiint_\Omega (2x - 2x + 3x)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \int_0^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3(\rho \operatorname{sen}\varphi\cos\theta)\rho^2 \operatorname{sen}\varphi d\theta d\varphi d\rho$$

$$= 3\int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 \operatorname{sen}^2\varphi \cos\theta\, d\theta\, d\varphi\, d\rho$$

$$= 3\int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\, d\varphi\, d\rho$$

$$= 3\int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 \operatorname{sen}^2\varphi\, d\varphi\, d\rho$$

$$= 3\int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 \left(\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right) d\varphi\, d\rho$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^2 \rho^3 \left(\varphi - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\varphi\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^2 \frac{\pi}{2}\rho^3\, d\rho$$

$$= \frac{3\pi}{4}\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^2$$

$$= 3\pi$$

■

Exercício 5 *Observe inicialmente que a porção do plano*

$$x + y + z = 1$$

que está no primeiro octante, pode ser parametrizada da seguinte maneira

$$\varphi : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 1 - u - v \end{cases}$$

onde

$$K : \begin{cases} 0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1 - u \end{cases}$$

Logo,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = (1, 0, -1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = (0, 1, -1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} = (1, 1, 1)$$

Além disso, sendo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$$

e γ a curva que delimita a fronteira do triângulo dado em questão, ou seja, da superfície φ, segue-se, usando o ***Teorema de Stokes****, que*

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\gamma = \iint_\varphi \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds$$

$$= \iint_K (-x, 0, z - 1) \cdot (1, 1, 1) du\, dv$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-u} (-u, 0, -u - v) \cdot (1, 1, 1) dv\, du$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-u} (-2u - v)\, dv\, du$$

$$= -\frac{1}{2}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Coelgiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof$^{\text{o}}$. Edson

Prova Final | **1$^{\text{o}}$ Semestre** | **2013**

Data: Quarta-feira, 02 de Outubro | **Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Determine o volume do tetraedro limitado pelos planos* $x+2y+z=2$, $x=2y$, $x=0$ *e* $z=0$.

Problema 2 *Calcule a integral*

$$\iiint_\Omega x e^{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$$

onde Ω *é a porção da esfera* $x^2+y^2+z^2\le 1$ *que fica no primeiro octante.*

Problema 3 *Calcule a integral*

$$\int_\gamma \mathbf{E}\cdot d\gamma$$

onde

$$\mathbf{E}(x,y)=\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

e

$$\gamma(t)=(t,1-t^4),\ -1\le t\le 1$$

Problema 4 *Calcule*

$$\int_\gamma x e^{-2x}dx+\left(x^4+2x^2y^2\right)dy$$

onde γ *é a fronteira da região entre os círculos* $x^2+y^2=1$ *e* $x^2+y^2=4$.

Problema 5 *Calcule*

$$\iint_\sigma \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds$$

onde

$$\mathbf{F}(x,y,z)=xz\,\mathbf{i}+yz\,\mathbf{j}+xy\,\mathbf{k}$$

e σ *é a porção da esfera* $x^2+y^2+z^2=4$ *que está dentro do cilindro* $x^2+y^2=1$ *e acima do plano* xy. *O vetor* $\mathbf{n}$ *representa o vetor normal que aponta na direção externa da superfície* σ.

Boa sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof$^{\text{o}}$. Edson

1$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito Prova Final **2013**
Data: Sexta-feira, 04 de Outubro **Turma M3**

Exercício 1 *Após realizarmos um esboço do tetraedro em questão, concluimos que seu volume é dado por*

$$V = \iint_K (2 - x - 2y)\, dx\, dy$$

onde

$$K = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{x}{2} \leq y \leq \dfrac{2-x}{2} \end{cases}$$

Ou seja

$$V = \int_0^1 \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{2-x}{2}} (2 - x - 2y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left(2y - xy - y^2\right) \Big|_{\frac{x}{2}}^{\frac{2-x}{2}} dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 - 2x + 1\right) dx$$

$$= \frac{1}{3}$$

■

Exercício 2 *Desejamos calcular*

$$I = \iiint_\Omega x e^{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz$$

Usando coordenadas esféricas

$$\sigma : \begin{cases} x = \rho \,\mathrm{sen}\, \varphi \cos\theta \\ y = \rho \,\mathrm{sen}\, \varphi \,\mathrm{sen}\, \theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

cujo jacobiano é dado por

$$\left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} \right| = \rho^2 \mathrm{sen}\, \varphi$$

o conjunto dado, neste referencial, pode ser descrito como

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Assim

$$I = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho \,\mathrm{sen}\, \varphi \cos\theta e^{\rho^2} \rho^2 \mathrm{sen}\, \varphi \, d\theta\, d\varphi d\rho$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 e^{\rho^2} \mathrm{sen}^2 \varphi \cos\theta \, d\theta\, d\varphi d\rho$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 e^{\rho^2} \mathrm{sen}^2 \varphi \,\mathrm{sen}\, \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi d\rho$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 e^{\rho^2} \mathrm{sen}^2 \varphi \, d\varphi d\rho$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 e^{\rho^2} \left(\frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right) \varphi \, d\varphi d\rho$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho^3 e^{\rho^2} \left(\varphi - \frac{\mathrm{sen}\, 2\varphi}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\rho$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_0^1 \rho^3 e^{\rho^2} d\rho$$

$$= \frac{\pi}{8}$$

■

Exercício 3 *Observe que*

$$\mathbf{E}(x,y) = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$$

onde

$$P(x,y) = \frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

e

$$Q(x,y) = \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

e, além disto, perceba que

$$\begin{aligned}\operatorname{Rot}\mathbf{E} &= \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\\ &= \frac{-3xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\\ &= 0\end{aligned}$$

Disto segue-se que o campo vetorial $\mathbf{E}$ *será conservativo em qualquer conjunto* $\Omega \in \mathbb{R}^2$ *onde* $(0,0) \notin \Omega$. *Assim, a integral que desejamos calcular é independente de caminho. Portanto escolheremos outro caminho que tenha os mesmos ponto de início e final da curva* γ. *Para isto considere a curva*

$$\gamma_2 : \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \operatorname{sen} t \end{cases} ;\ \pi \le t \le 2\pi$$

Portanto, segue-se que

$$\begin{aligned}\int_\gamma \mathbf{E}\cdot d\gamma &= \int_{\gamma_2} \mathbf{E}\cdot d\gamma_2\\ &= \int_\pi^{2\pi} \mathbf{E}(\gamma_2(t))\cdot\gamma_2'(t)dt\\ &= \int_\pi^{2\pi} \mathbf{E}(\cos t, \operatorname{sen} t)\cdot(-\operatorname{sen} t, \cos t)\,dt\\ &= \int_\pi^{2\pi} (\cos t, \operatorname{sen} t)\,(-\operatorname{sen} t, \cos t)\,dt\\ &= \int_0^1 0dt\\ &= 0\end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Usando o **Teorema de Green**, temos que*

$$\begin{aligned} I &= \int_\gamma xe^{-2x}\,dx + (x^4+2x^2y^2)\,dy\\ &= \iint_K \left[\frac{\partial}{\partial x}(x^4+2x^2y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(xe^{-2x})\right]dx\,dy\\ &= \iint_K 4x(x^2+y^2)dx\,dy\end{aligned}$$

onde

$$K = \left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| 1 \le x^2+y^2 \le 4\right\}$$

Usando coordenadas polares,

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

temos que

$$|J| = r$$

e, o conjunto K *será transformado no conjunto*

$$K' : \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 1 \le r \le 2 \end{cases}$$

Portanto

$$\begin{aligned} I &= \iint_K 4x(x^2+y^2)dx\,dy\\ &= \iint_{K'} 4r\cos\theta\, r^2 r\,dr\,d\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\int_1^2 4\cos\theta\, r^4\,dr\,d\theta\\ &= 0\end{aligned}$$

■

Exercício 5 *O **teorema de Stokes** enuncia que*

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\gamma = \iint_\sigma \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$$

onde, em nosso caso, σ *é a porção da esfera* $x^2+y^2+z^2=4$ *que está dentro do cilidro* $x^2+y^2=1$. *Uma parametrização possível para a curva que consiste da fronteira de* σ *seriA*

$$\gamma : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \\ z = \sqrt{3} \end{cases},\ 0 \le t \le 2\pi$$

Portanto

$$\begin{aligned}\iint_\sigma \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds &= \int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\gamma\\ &= \int_0^{2\pi}\mathbf{F}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt\\ &= \int_0^{2\pi} 0dt\\ &= 0\end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III - Turma 13

Prof^{o}. Edson

1^{a} Prova **2^{o} Semestre** **2013**

Data: 04 de Dezembro **Duração: 10:00 - 12:00**

Problema 1 *Calcule a integral*

$$\iint_{\Omega} \frac{2y + x}{y - 2x} dx\, dy$$

onde Ω *é o trapézio delimitado pelos pontos* $(-1, 0), (-2, 0), (0, 4)$ *e* $(0, 2)$.

Problema 2 *Calcule as integrais:*

a). $\displaystyle\int_0^1 \int_{4x}^4 e^{-y^2} dy\, dx;$

b). $\displaystyle\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 \cos(x^2) dx\, dy.$

Problema 3 *Calcule o volume do sólido delimitado pelos planos* $z = x$, $y = x$, $x + y = 2$ *e* $z = 0$.

Problema 4 *Calcule o volume da região do espaço que está dentro da esfera* $x^2+y^2+z^2 = 16$ *e fora do cilindro* $x^2 + y^2 = 4$.

Problema 5 *Determine o centro de massa da lâmina que tem a forma da região no primeiro quadrante, do disco* $x^2 + y^2 \leq 1$, *cuja densidade em cada ponto* (x, y) *é diretamente proporcional à distância deste ponto ao eixo* x.

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Profº. Edson

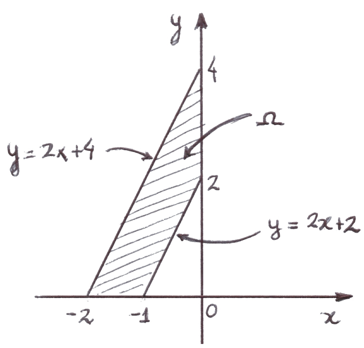
2º Semestre

Gabario 1ª Prova **2013**
Data: Domingo, 19 de Janeiro **Turma 13**

Exercício 1 *Desejamos calcular a integral*

$$\iint_\Omega \frac{2y+x}{y-2x}dx\,dy$$

onde Ω é o trapézio esboçado na figura abaixo



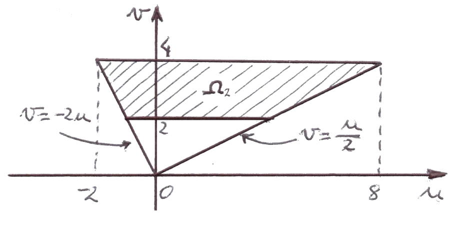
Para isto, considere a seguinte mudança de variáveis

$$\varphi^{-1}:\begin{cases} u = 2y+x \\ v = y-2x \end{cases} \Leftrightarrow \varphi:\begin{cases} x = \dfrac{u-2v}{5} \\ y = \dfrac{2u+v}{5} \end{cases},$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{5}$$

e, neste novo sistema de coordenadas, o conjunto Ω torna-se



$$\Omega_2:\begin{cases} -\dfrac{v}{2} \le u \le 2v \\ 2 \le v \le 4 \end{cases}$$

e, disto segue-se que

$$\iint_\Omega \frac{2y+x}{y-2x}dx\,dy = \iint_{\Omega_2}\frac{u}{v}\frac{1}{5}du\,dv$$

$$= \frac{1}{5}\int_2^4\int_{-\frac{v}{2}}^{2v}\frac{u}{v}du\,dv$$

$$= \frac{1}{5}\int_2^4 \left.\frac{u^2}{2v}\right|_{-\frac{v}{2}}^{2v} dv$$

$$= \frac{1}{10}\int_2^4\left(4v - \frac{v}{4}\right)dv$$

$$= \frac{3}{16}\,v^2\Big|_2^4$$

$$= \frac{9}{4}$$

■

Exercício 2

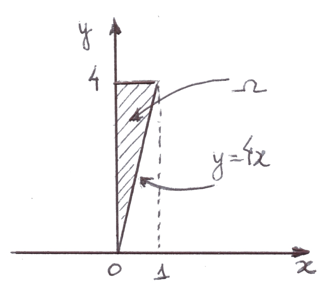
a). *Desejamos calcular a integral*

$$\int_0^1\int_{4x}^4 e^{-y^2}dy\,dx$$

Para isto, observe que o domínio de integração é

$$\Omega:\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 4x \le y \le 4 \end{cases}$$

cujo gráfico pode ser esboçado da seguinte maneira



Observe porém, que o conjunto Ω pode também ser descrito da seguinte maneira

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq \dfrac{y}{4} \\ \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

Ou seja,

$$\int_0^1 \int_{4x}^4 e^{-y^2}\, dy\, dx = \int_0^4 \int_0^{\frac{y}{4}} e^{-y^2}\, dx\, dy$$

$$= \int_0^4 e^{-y^2} x \Big|_0^{\frac{y}{4}} dy$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^4 y e^{-y^2}\, dy$$

$$= -\frac{1}{8} e^{-y^2}\Big|_0^4$$

$$= \frac{1}{8}\left(1 - e^{-16}\right)$$

□

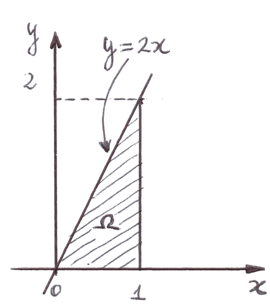
b). *Desejamos agora, calcular a seguinte integral*

$$\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 \cos\left(x^2\right) dx\, dy$$

De modo semelhante ao que foi feito no item anterior, observe que o domínio de integração é o conjunto

$$\Omega : \begin{cases} \dfrac{y}{2} \leq x \leq 1 \\ \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

cujo esboço é dado pela seguinte figura



Observe que o conjunto Ω pode também ser descrito na forma

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ \\ 0 \leq y \leq 2x \end{cases}$$

Ou seja

$$\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 \cos\left(x^2\right) dx\, dy = \int_0^1 \int_0^{2x} \cos\left(x^2\right) dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \cos\left(x^2\right) y \Big|_0^{2x} dx$$

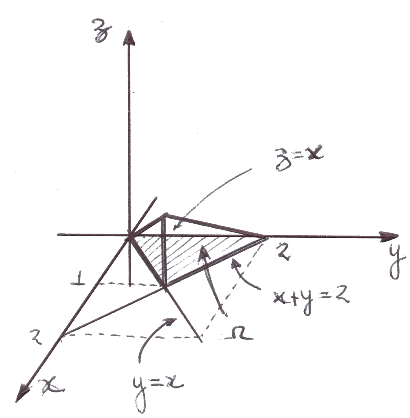
$$= \int_0^1 2x \cos\left(x^2\right)\, dx$$

$$= \operatorname{sen}\left(x^2\right)\Big|_0^1$$

$$= \operatorname{sen} 1$$

■

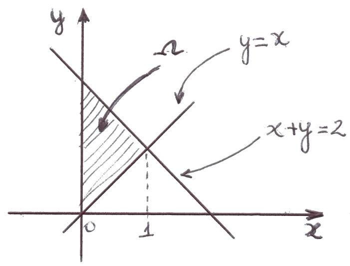
Exercício 3 *Esboçando o sólido em questão, temos a seguinte figura*



donde segue-se que o volume procurado é dado por

$$V = \iint_\Omega f(x,y)\, dx\, dy$$

onde



$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x \leq y \leq 2 - x \end{cases}$$

e

$$f(x, y) = x$$

ou seja,

$$V = \iint_\Omega x dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \int_x^{2-x} x\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 xy \Big|_x^{2-x} dx$$

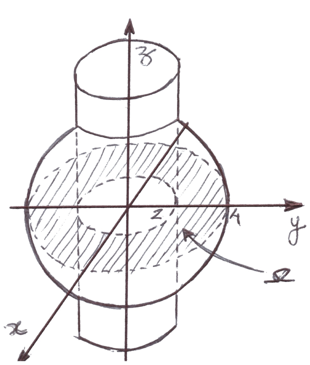
$$= 2\int_0^1 (x - x^2) dx$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right) \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{3}$$

■

Exercício 4 *Esboçando o sólido descrito no problema, obtemos a seguinte figura*



segue-se portanto, que o volume V deste sólido é dado por

$$V = \iint_\Omega f(x, y) dx\, dy$$

onde Ω é o conjuntos dos pontos (x, y) tais que

$$4 \leq x^2 + y^2 \leq 16$$

e

$$f(x, y) = 2\sqrt{16 - x^2 - y^2}$$

Usando coordenadas polares, tome

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$|J| = r$$

e, neste sistema de coordenadas, o conjunto Ω torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 2 \leq r \leq 4 \end{cases}$$

Logo,

$$V = \iint_\Omega 2\sqrt{16 - x^2 - y^2} dx\, dy$$

$$= \iint_{\Omega_2} 2r\sqrt{16 - r^2} dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_2^4 2r\sqrt{16 - r^2} dr\, d\theta$$

$$= -\frac{2}{3}\int_0^{2\pi} \left(16 - r^2\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_2^4 d\theta$$

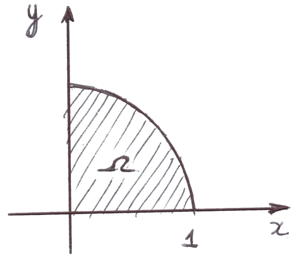
$$= 16\sqrt{3}\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= 32\sqrt{3}\pi$$

■

Exercício 5 *Observe que a lâmina que tem a forma da região no primeiro quadrante, do disco $x^2 + y^2 \leq 1$*

possui o seguinte esboço



Sendo a densidade dessa lâmina em cada ponto (x, y) *diretamente proporcional à distância deste ponto ao eixo* x, *ou seja*

$$\delta(x, y) = ky$$

sua massa será dada por

$$M = \iint_{\Omega} \delta(x, y) dx\, dy$$

Usando coordenadas polares, ou seja

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$|J| = r$$

o conjunto Ω, *neste sistema de coordenadas, torna-se*

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$$

Portanto,

$$M = \iint_{\Omega_2} k\, r\,\mathrm{sen}\,\theta\, r dr\, d\theta$$

$$= k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^2 \mathrm{sen}\,\theta\, dr\, d\theta$$

$$= \frac{k}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}\,\theta\, r^3 \Big|_0^1 d\theta$$

$$= \frac{k}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}\,\theta\, d\theta$$

$$= -\frac{k}{3} \cos\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{k}{3}$$

E, o centro de massa, será (x_c, y_c) *onde*

$$x_c = \frac{1}{M} \iint_{\Omega} x\delta(x, y) dx\, dy$$

$$= \frac{3}{k} \iint_{\Omega} kxy dx\, dy$$

$$= 3 \iint_{\Omega_2} r\cos\theta r\,\mathrm{sen}\,\theta\, r dr\, d\theta$$

$$= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^3 \mathrm{sen}\,\theta \cos\theta\, dr\, d\theta$$

$$= \frac{3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}\,\theta \cos\theta\, r^4 \Big|_0^1 d\theta$$

$$= \frac{3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}\,\theta \cos\theta\, d\theta$$

$$= \frac{3}{8} \mathrm{sen}^2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{8}$$

e

$$y_c = \frac{1}{M} \iint_{\Omega} y\delta(x, y) dx\, dy$$

$$= \frac{3}{k} \iint_{\Omega} ky^2 dx\, dy$$

$$= 3 \iint_{\Omega_2} r^2 \mathrm{sen}^2\,\theta\, r dr\, d\theta$$

$$= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^3 \mathrm{sen}^2\,\theta\, dr\, d\theta$$

$$= \frac{3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}^2\theta\, r^4 \Big|_0^1 d\theta$$

$$= \frac{3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}^2\theta\, d\theta = \frac{3\pi}{16}$$

Assim, concluímos que o centro de massa é o ponto $\left(\dfrac{3}{8}, \dfrac{3\pi}{16}\right)$. ∎

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III - Turma 13

Prof$^{\text{o}}$. Edson

2ª Prova **2º Semestre** **2013**

Data: 03 de Fevereiro de 2014 **Duração: 10:00 - 12:00**

Problema 1 *Calcule a integral*

$$\iiint_{\Omega} \sqrt{x+y}\,\sqrt[3]{x+2y-z}\,dx\,dy dz$$

onde Ω *é a região* $1 \leq x+y \leq 2$, $0 \leq x+2y-z \leq 1$ *e* $0 \leq z \leq 1$.

Problema 2 *Calcule as integrais:*

a). $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} e^{-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,dz\,dy\,dx;$

b). $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} z^2 dz\,dx\,dy$

Problema 3 *Considere o cilindro homogêneo*

$$(x-a)^2 + y^2 \leq a^2,\ 0 \leq z \leq h$$

onde a *e* h *são números reias positivos. Calcule seu momento de inércia em relação à reta* $x = a$, $y = 0$.

Problema 4 *Determine o trabalho realizado pelo campo de força*

$$\mathbf{F}(x,y) = x^2\mathbf{i} + ye^x\mathbf{j}$$

em uma partícula que se move sobre a parábola $x = y^2 + 1$ *do ponto* $(1,0)$ *ao ponto* $(2,1)$.

Problema 5 *Determine a massa de um arame com formato da hélice*

$$\gamma(t) = (t, \cos t, \operatorname{sen} t),\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

sendo sua densidade em qualquer ponto igual ao quadrado da distância deste ponto à origem.

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Profº. Edson

2º Semestre

Gabarito 2ª Prova **2013**
Data: Domingo, 9 de Setembro **Turma 13**

Exercício 1 *Desejamos calcular a integral*

$$I = \iiint_\Omega \sqrt{x+y}\,\sqrt[3]{x+2y-z}\,dx\,dy\,dz$$

Para isto, considere a seguinte mudança de variáveis

$$\varphi^{-1} : \begin{cases} u = x+y \\ v = x+2y-z \\ w = z \end{cases}$$

Observe que

$$\varphi : \begin{cases} x = 2u - v - w \\ y = -u + v + w \\ z = w \end{cases}$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = 1$$

e, neste referencial, o conjunto

$$\Omega : \begin{cases} 1 \le x+y \le 2 \\ 0 \le x+2y-z \le 1 \\ 0 \le z \le 1 \end{cases}$$

torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 1 \le u \le 2 \\ 0 \le v \le 1 \\ 0 \le w \le 1 \end{cases}$$

Portanto, segue-se que

$$I = \iiint_{\Omega_2} \sqrt{u}\,\sqrt[3]{v}\,|J|\,du\,dv\,dw$$

$$= \int_1^2\int_0^1\int_0^1 \sqrt{u}\,\sqrt[3]{v}dw\,dv\,du$$

$$= \int_1^2\int_0^1 \sqrt{u}\,\sqrt[3]{v}w\,\Big|_0^1 dv\,du$$

$$= \int_1^2\int_0^1 \sqrt{u}\,\sqrt[3]{v}dv\,du$$

$$= \int_1^2 \frac{3}{4}\sqrt{u}v^{\frac{4}{3}}\,\Big|_0^1\,du$$

$$= \int_1^2 \frac{3}{4}\sqrt{u}\,du$$

$$= \frac{1}{2}u^{\frac{3}{2}}\,\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{8}-1\right) = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$$

■

Exercício 2

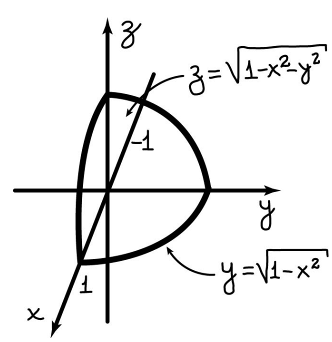
a). *Desejamos calcular a integral*

$$A = \int_{-1}^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} e^{-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,dz\,dy\,dx$$

Para isto, observe que o domínio de integração é

$$\Omega : \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le \sqrt{1-x^2} \\ 0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2} \end{cases}$$

cujo gráfico pode ser esboçado da seguinte maneira



Usando coordenadas esféricas, ou seja

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}\right| = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi$$

O conjunto Ω torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

e disto, segue-se que

$$A = \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-(\rho^2)^{\frac{3}{2}}} \, |J| \, d\varphi \, d\theta \, d\rho$$

$$= \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho^3} \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi \, d\theta \, d\rho$$

$$= \int_0^1 \int_0^\pi -e^{-\rho^3} \rho^2 \cos\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \, d\theta \, d\rho$$

$$= \int_0^1 \int_0^\pi e^{-\rho^3} \rho^2 d\theta \, d\rho$$

$$= \int_0^1 e^{-\rho^3} \rho^2 \theta \Big|_0^\pi \, d\rho$$

$$= \pi \int_0^1 e^{-\rho^3} \rho^2 d\rho$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

□

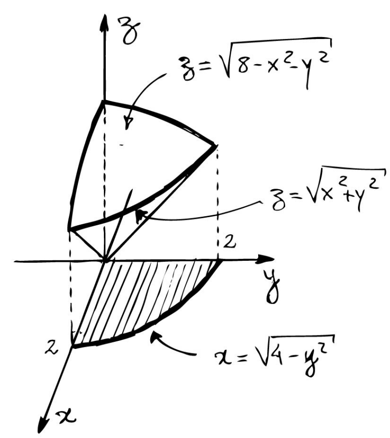
b). *Desejamos agora, calcular a seguinte integral*

$$B = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} z^2 dz \, dx \, dy$$

e, o domínio de integração, neste caso é o conjunto

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt{4-y^2} \\ 0 \leq y \leq 2 \\ \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{8-x^2-y^2} \end{cases}$$

cujo esboço é dado pela seguinte figura



Usando coordenadas esféricas, ou seja

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}\right| = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi$$

o conjunto Ω, neste referencial, torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{4} \\ 0 \leq \rho \leq \sqrt{8} \\ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Assim, segue-se que

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{8}} \rho^2 \cos^2\varphi \; |J| \, d\rho \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{8}} \rho^4 \cos^2\varphi \,\mathrm{sen}\,\varphi \, d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \,\mathrm{sen}\,\varphi \,\frac{\rho^5}{5}\Bigg|_0^{\sqrt{8}} d\theta\, d\varphi$$

$$= \frac{128\sqrt{2}}{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \,\mathrm{sen}\,\varphi \, d\theta\, d\varphi$$

$$= \frac{128\sqrt{2}\pi}{10}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\varphi \,\mathrm{sen}\,\varphi \,\theta\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi$$

$$= \frac{64\pi\sqrt{2}}{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\varphi \,\mathrm{sen}\,\varphi \, d\varphi$$

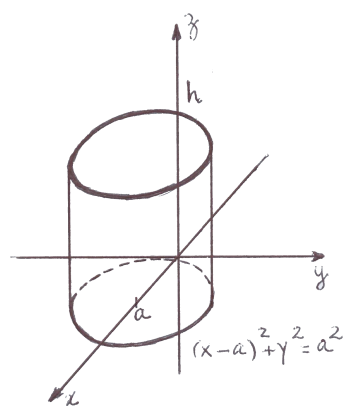
$$= -\frac{64\pi\sqrt{2}}{15}\cos^3\varphi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -\frac{64\pi\sqrt{2}}{15}\left(\frac{1-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{32\pi}{15}\left(2\sqrt{2}-1\right)$$

■

Exercício 3 *Um esboço possível para o sólido em questão é dado na figura abaixo*



A distância de um ponto qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *à reta* $x = a$, $y = 0$, *é dada por*

$$r = \sqrt{(x-a)+y^2}$$

e, o momento de inércia procurado é então

$$I = \iiint_\Omega r^2 \delta dx\, dy\, dz$$

onde $\delta(x, y, z) = k$, $k \in \mathbb{R}$, *é a densidade do sólido dado.*

Usando coordenadas cilíndricas com centro no ponto $(a, 0, 0)$, *ou seja*

$$\begin{cases} x = a + \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$|J| = r$$

o conjunto Ω *torna-se*

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \rho \le a \\ 0 \le z \le h \end{cases}$$

Portanto

$$I = \iint_{\Omega_2} \rho^2\, k\, |J|\, dr\, d\theta\, dz$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{h}\int_0^{a} k\rho^3 d\rho\, dz\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{h} k\frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^{a} dz\, d\theta$$

$$= \frac{ka^4}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{h} dz\, d\theta$$

$$= \frac{ka^4}{4}\int_0^{2\pi} z\Bigg|_0^{h} d\theta$$

$$= \frac{ka^4h}{4}\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{k\pi a^4 h}{2}$$

■

Exercício 4 *O trecho da parábola* $x = y^2 + 1$ *do ponto* $(1, 0)$ *ao ponto* $(2, 1)$ *pode ser parametrizado da seguinte forma*

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = t^2 + 1 \\ y(t) = t \end{cases} \quad , 0 \le t \le 1$$

e o trabalho em questão, é dado por

$$\tau = \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\gamma$$

onde

$$\mathbf{F}(x,y) = x^2\mathbf{i} + ye^x\mathbf{j}$$

ou seja,

$$\tau = \int_0^1 \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt$$

$$= \int_0^1 \mathbf{F}(t^2+1,t) \cdot (2t,1)\,dt$$

$$= \int_0^1 \left(\left(t^2+1\right)^2, te^{t^2+1}\right) \cdot (2t,1)\,dt$$

$$= \int_0^1 \left[2t\left(t^2+1\right)^2 + te^{t^2+1}\right] dt$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{e}{2} + \frac{7}{3}$$

■

Exercício 5 *Sendo a parametrização da hélice, dada por*

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \cos t \quad , 0 \le t \le 2\pi \\ z(t) = \operatorname{sen} t \end{cases}$$

e, a densidade em qualquer ponto deste arame o quadrado da distância do ponto à origem, ou seja de densidade homogênea

$$\delta(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

teremos, que sua massa, é

$$M = \int_\gamma \delta(x,y)ds$$

$$= \int_0^{2\pi} \delta(\gamma(t)) \left\|\gamma'(t)\right\| dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(t^2+1\right)\sqrt{2}dt$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{t^3}{3} + t\right)\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{8\pi^3}{3} + 2\pi\right)$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III - Turma 13

Prof$^{\text{o}}$. Edson

3ª Prova | **2º Semestre** | **2013**

Data: 12 de Março de 2014 | **Duração: 10:00 - 12:00**

Problema 1 *Calcule a integral*

$$\oint_\gamma (x+y)dx + (y+x^2)\,dy$$

onde γ é a fronteira da região entre os círculos $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=4$.

Problema 2 *Calcule a integral*

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\gamma$$

onde

$$\mathbf{F}(x,y) = e^x\cos y\,\mathbf{i} - e^x\mathrm{sen}\,y\,\mathbf{j}$$

e γ é o segmento da reta $3x+4y=12$ do ponto que corresponde à intersecão com o eixo y ao ponto de interseção com o eixo x.

Problema 3 *Calcule a área do parabolóide $z=\dfrac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$ abaixo do plano $z=4$.*

Problema 4 *Calcule o fluxo do campo vetorial*

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

através da região do cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$ entre os planos $z=1$ e $z=2$, orientada por vetores normais para baixo.

Problema 5 *Calcule*

$$\iint_\sigma \mathrm{rot}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

onde $\mathbf{F}(x,y,z) = y\mathbf{i}+x\mathbf{j}+xz\mathbf{k}$ e σ é a região da superfície $z=x+y+2$ com $x^2+\dfrac{y^2}{4}\leq 1$ e vetor normal apontando para baixo.

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof$^{\text{o}}$. Edson

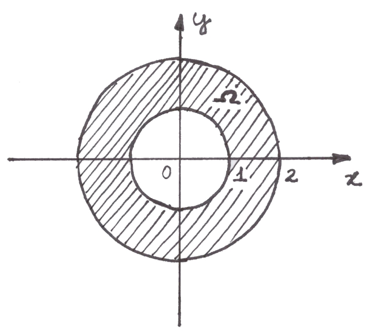
2$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito 3$^{\text{a}}$ Prova **2013**
Data: Quinta-feira, 7 de Abril **Turma 13**

Exercício 1 *Considere*

$$I = \oint_{\gamma} (x+y)dx + (y+x^2)dy$$

Observe na figura abaixo que a curva γ e o conjunto Ω que consiste no interior de γ, obedecem às condições necessárias ao uso do ***Teorema de Green****.*



E assim, usando-o, teremos que

$$I = \iint_{\Omega} (2x-1)\,dx\,dy$$

Onde Ω é o conjunto de todos os (x,y) tais que $1 \leq x^2+y^2 \leq 4$. Usando coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = r$$

o conjunto Ω torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

e disto segue-se que

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi}\int_1^2 (2r\cos\theta - 1)\,r\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{3}r^3\cos\theta - \frac{1}{2}r^2\right)\Big|_1^2 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{14}{3}\cos\theta - \frac{3}{2}\right) d\theta \\ &= \left(\frac{14}{3}\mathrm{sen}\,\theta - \frac{3}{2}\theta\right)\Big|_0^{2\pi} \\ &= -3\pi \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Sabemos que*

$$\mathbf{F}(x,y) = e^x\cos y\,\mathbf{i} - e^x\mathrm{sen}\,y\,\mathbf{j}$$

Observe que,

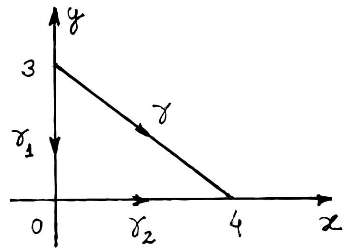
$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\,F(x,y) &= \frac{\partial\left(-e^x\mathrm{sen}\,y\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(e^x\cos y\right)}{\partial y} \\ &= -e^x\mathrm{sen}\,y + e^x\mathrm{sen}\,y \\ &= 0 \end{aligned}$$

e além disso

$$D_{\mathbf{F}} = \mathbb{R}^2\,(simplesmente\,conexo)$$

Portanto $\mathbf{F}$ é um campo conservativo em $\mathbb{R}^2$ e, com isto, a integral que desejamos calcular é independente do caminho. Considere então o caminho

$$\bar{\gamma} = \gamma_1 \cup \gamma_2$$



onde

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 - t \end{cases} ;\ 0 \leq t \leq 3$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} ;\ 0 \leq t \leq 4$$

Logo

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\gamma = \int_{\bar{\gamma}} \mathbf{F} \cdot d\bar{\gamma}$$

$$= \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\gamma_1 + \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\gamma_2$$

$$= \int_0^3 \mathbf{F}(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) dt + \int_0^4 \mathbf{F}(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) dt$$

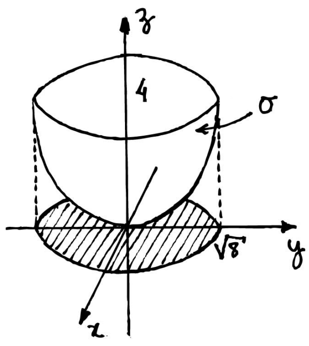
$$= \int_0^3 \mathbf{F}(0, 3-t) \cdot (0, -1) dt + \int_0^4 \mathbf{F}(t, 0) \cdot (1, 0) dt$$

$$= \int_0^3 \operatorname{sen}(3-t) dt + \int_0^4 e^t dt$$

$$= \cos(3-t) \Big|_0^3 + e^t \Big|_0^4 = e^4 - \cos 3$$

■

Exercício 3 *Realizando um esboço da superfície em questão temos a seguinte figura*



Uma parametrização possível desta superfície é dada por

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2\right) \end{cases} ;\ \underbrace{u^2 + v^2 \leq 8}_{\Omega}$$

e, sua área pode ser obtida através da seguinte integral

$$A = \iint_\sigma dS$$

$$= \iint_\Omega \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| du\, dv$$

Observe porém que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = (1, 0, u)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v} = (0, 1, v)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} = (-u, -v, 1)$$

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| = \sqrt{u^2 + v^2 + 1}$$

ou seja

$$A = \iint_\Omega \sqrt{u^2 + v^2 + 1}\, du\, dv$$

Usando coordenadas polares

$$\begin{cases} u = r\cos\theta \\ v = r \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(r, \theta)} \right| = r$$

o conjunto Ω torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq r \leq \sqrt{8} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

e disto segue-se que

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{8}} r\sqrt{r^2+1}dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_1^{9} \frac{1}{2}\sqrt{w}dw\,d\theta$$

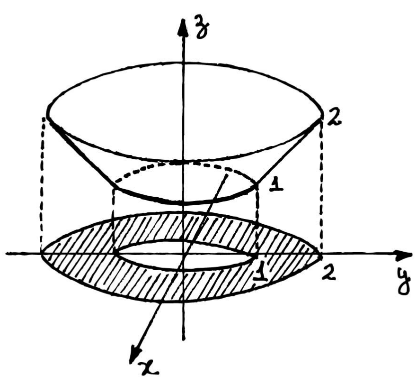
$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{3}\sqrt{w^3}\Big|_1^9 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{26}{3}d\theta$$

$$= \frac{52\pi}{3}$$

■

Exercício 4 *Um esboço possível da superfície em questão é dado pela figura abaixo*



e, uma parametrização possível para esta superfície é

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{u^2+v^2} \end{cases} ; \underbrace{1 \le u^2+v^2 \le 4}_{\Omega}$$

Observe que

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u} = \left(1, 0, \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial v} = \left(0, 1, \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u} \times \frac{\partial\sigma}{\partial v} = \left(\frac{-u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \frac{-v}{\sqrt{u^2+v^2}}, 1\right)$$

Como estamos interessados no vetor normal que aponta para baixo (componente z negativa), segue-se que

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial\sigma}{\partial v} \times \frac{\partial\sigma}{\partial u}}{\left\|\frac{\partial\sigma}{\partial v} \times \frac{\partial\sigma}{\partial u}\right\|}$$

e assim, segue-se que

$$\iint_\sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_\Omega \mathbf{F}(\sigma(u,v))\cdot\mathbf{n}\left\|\frac{\partial\sigma}{\partial v} \times \frac{\partial\sigma}{\partial u}\right\| du\,dv$$

$$= \iint_\Omega \mathbf{F}(\sigma(u,v))\cdot\left(\frac{\partial\sigma}{\partial v} \times \frac{\partial\sigma}{\partial u}\right) du\,dv$$

$$= \iint_\Omega \left(\frac{u+v}{\sqrt{u^2+v^2}} - 1\right) du\,dv$$

Usando coordenadas polares, ou seja

$$\begin{cases} u = r\cos\theta \\ v = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,\theta)}\right| = r$$

o conjunto Ω torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 1 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

e com isto, temos que

$$\iint_\sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_{\Omega_2} \left(\frac{r\cos\theta + r\,\mathrm{sen}\,\theta}{r} - 1\right) rdr\,d\theta$$

$$= \int_1^2\int_0^{2\pi} (r\cos\theta + r\,\mathrm{sen}\,\theta - r)\,d\theta\,dr$$

$$= \int_1^2 (r\,\mathrm{sen}\,\theta - r\cos\theta - r\theta)\Big|_0^{2\pi} dr$$

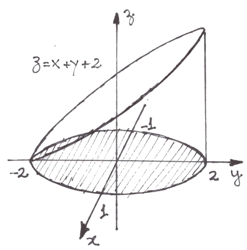
$$= \int_1^2 -2\pi r\,dr$$

$$= -\pi r^2\Big|_1^2$$

$$= -3\pi$$

■

Exercício 5 *A curva correspondente à fronteira da superfície em questão (orientada no sentido contrário ao que queremos) pode ser parametrizada da seguinte maneira*



$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = 2\,\text{sen}\,t \\ z(t) = \cos t + 2\,\text{sen}\,t + 2 \end{cases} \quad , \ 0 \leq t \leq 2\pi$$

*e, usando o **Teorema de Stokes**, segue-se que*

$$\iint_{\sigma} \text{rot}\,\mathbf{F}\cdot n\, dS = -\int_{\Gamma} \mathbf{F}\cdot d\Gamma$$

$$= -\int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\Gamma(t))\cdot\Gamma'(t)dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} \Big(3\cos^2 t\,\text{sen}\,t + 2\cos t(1-\text{sen}\,t) + 8\cos^2 t - 4\,\text{sen}^2 t\cos t - 2\Big)\, dt$$

$$= -4\pi$$

□

(Outro modo de se resolver este exercício)

Uma parametrização possível para a supérfície em questão seria

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u + v + 2 \end{cases} \quad ; \ \underbrace{u^2 + \frac{v^2}{4} \leq 1}_{\Omega}$$

Observe que

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u} = (1,0,1)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial v} = (0,1,1)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v} = (-1,-1,1)$$

Como estamos interessados no vetor normal apontando para baixo segue-se que

$$n = \frac{\frac{\partial\sigma}{\partial v}\times\frac{\partial\sigma}{\partial u}}{\left\|\frac{\partial\sigma}{\partial v}\times\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right\|}$$

Observe, que, sendo

$$\mathbf{F}(x,y,z) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$$

teremos

$$\text{rot}\,\mathbf{F}(x,y,z) = -z\mathbf{j}$$

e, disto segue-se que

$$\iint_{\sigma} \text{rot}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS = \iint_{\Omega} \text{rot}\,\mathbf{F}(\sigma(u,v))\cdot\left(\frac{\partial\sigma}{\partial v}\times\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right) du\,dv$$

$$= \iint_{\Omega} (0,-u-v-2,0)\cdot(1,1,-1)du\,dv$$

$$= \iint_{\Omega} (-u-v-2)du\,dv$$

Usando coordenadas polares,

$$\begin{cases} u = r\cos\theta \\ v = 2r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,\theta)}\right| = 2r$$

o conjunto Ω torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

e com isto, temos que

$$\iint_{\sigma} \text{rot}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS = \iint_{\Omega_2} (-r\cos\theta - 2r\,\text{sen}\,\theta - 2)|J|\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^1\int_0^{2\pi} (-2r^2\cos\theta - 4r^2\text{sen}\,\theta - 4r)d\theta\, dr$$

$$= \int_0^1 \Big(-2r^2\text{sen}\,\theta + 4r^2\cos\theta - 4r\theta\Big)\Big|_0^{2\pi} dr$$

$$= \int_0^1 -8\pi r dr$$

$$= -4\pi$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III - Turma 13

Profº. Edson

Prova Final | **2º Semestre** | **2013**

Data: 19 de Março de 2014 | **Duração: 10:00 - 12:00**

Problema 1 *Calcule as integrais*

a). $\displaystyle\int_0^1\int_{2x}^2 e^{y^2}\,dy\,dx;$

b). $\displaystyle\int_0^2\int_{y^2}^4 y\,\cos(x^2)\,dx\,dy.$

Problema 2 *Calcule o volume do sólido limitado pelo cilindro* $x^2+z^2=4$ *e pelos planos* $y=-1$ *e* $y+z=4$.

Problema 3 *Calcule a integral*

$$\oint_\gamma x^2y^2dx + xy\,dy$$

onde γ *consiste do arco da parábola* $y=x^2$ *do ponto* $(0,0)$ *ao ponto* $(1,1)$ *e dos segmentos de reta do ponto* $(1,1)$ *ao ponto* $(0,1)$ *e do ponto* $(0,1)$ *ao ponto* $(0,0)$.

Problema 4 *Calcule o fluxo do campo vetorial*

$$\mathbf{F}(x,y,z) = 6x\,\mathbf{i} + 3y\,\mathbf{j} + 2x\,\mathbf{k}$$

através da fronteira do tetraedro de vértices $(0,0,0),(3,0,0),(0,1,0)$ *e* $(0,0,2)$.*(Considere o vetor normal apontando para fora do tetraedro).*

Problema 5 *Calcule*

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\gamma$$

onde

$$\mathbf{F}(x,y,z) = x^2z\,\mathbf{i} + xy^2\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$$

e γ *é a interseção do plano* $x+y+z=1$ *com o cilindro* $x^2+y^2=9$ *com orientação no sentido anti-horário quando visto de cima.*

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^o. Edson

2^o Semestre

Gabarito Prova Final **2013**
Data: 25 de Março de 2014 **Turma 13**

Exercício 1

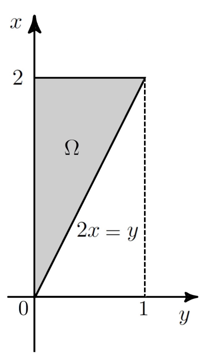
a). *Desejamos calcular a integral*

$$\int_0^1 \int_{2x}^2 e^{y^2}\,dy\,dx$$

Para isto, observe que o domínio de integração é

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 2x \le y \le 2 \end{cases}$$

cujo gráfico pode ser esboçado da seguinte maneira



Observe que o conjunto Ω também pode ser expresso da seguinte forma

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le x \le \dfrac{y}{2} \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$$

Portanto

$$\int_0^1 \int_{2x}^2 e^{y^2}\,dy\,dx = \int_0^2 \int_0^{\frac{y}{2}} e^{y^2}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^2 e^{y^2} x\Big|_0^{\frac{y}{2}}\,dy$$

$$= \int_0^2 \frac{y}{2} e^{y^2}\,dy$$

$$= \frac{e^{y^2}}{4}\Bigg|_0^2$$

$$= \frac{e^4 - 1}{4}$$

$\square$

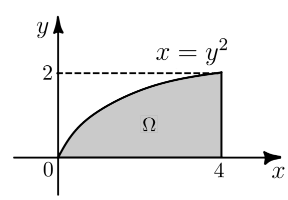
b). *Desejamos agora, calcular a integral*

$$\int_0^2 \int_{y^2}^4 y\cos\left(x^2\right)\,dx\,dy$$

Observe, no entanto, que seu domínio de integração é dado por

$$\Omega : \begin{cases} y^2 \le x \le 4 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$$

que está esboçado na seguinte figura



Disto segue-se que Ω também pode ser expresso da seguinte maneira

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le x \le 4 \\ 0 \le y \le \sqrt{x} \end{cases}$$

Ou seja,

$$\int_0^2 \int_{y^2}^4 y \cos\left(x^2\right) dx\, dy = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} y \cos\left(x^2\right) dy\, dx$$

$$= \int_0^4 \frac{y^2}{2} \cos\left(x^2\right) \Big|_0^{\sqrt{x}} dx$$

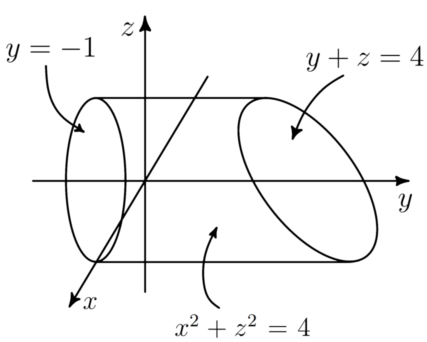
$$= \int_0^4 \frac{x}{2} \cos\left(x^2\right)\, dx$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\left(x^2\right)}{4} \Big|_0^4$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(16)}{4}$$

■

Exercício 2 *Realizando um esboço do sólido em questão, obtemos a seguinte figura*



Portanto, o volume procurado é dado por

$$V = \iiint_\Omega dx\, dy\, dz$$

Usando coordenadas cilíndricas, ou seja

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = y \\ z = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

cujo jacobiano e

$$J = \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,y,\theta)} \right| = r$$

o sólido em questão pode ser expresso, neste novo referencial, por

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ -1 \le y \le 4 - r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

Portanto,

$$V = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{4 - r\operatorname{sen}\theta} r\, dy\, d\theta\, dr$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} ry \Big|_{-1}^{4 - r\operatorname{sen}\theta} d\theta\, dr$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} r\left(4 - r\operatorname{sen}\theta + 1\right) d\theta\, dr$$

$$= \int_0^2 \left(5r\theta + r\cos\theta\right) \Big|_0^{2\pi} dr$$

$$= \int_0^2 10\pi r\, dr$$

$$= 5\pi r^2 \Big|_0^2$$

$$= 20\pi$$

■

(Outro modo): *Perceba que o sólido em questão trata-se de um cilindro cortado obliquamente. Desta forma, se colocarmos dois deles formando um maior, conforme a figura abaixo*

figure

teremos um cilindro com o dobro do volume que desejamos encontrar. Ou seja

$$V = \frac{(\acute{A}rea\, da\, base)(Altura\, menor + Altura\, maior)}{2}$$

$$= \frac{4\pi\,(3+7)}{2}$$

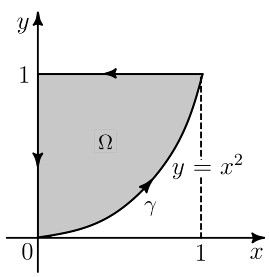
$$= 20\pi$$

■

Exercício 3 *Desejamos calcular*

$$I = \oint_\gamma x^2y^2dx + xydy$$

Realizando um esboço da região delimitada pelas curvas dadas, obtemos a seguinte figura



Como trata-se de uma curva fechada, o ***Teorema de Green*** *nos garante que*

$$I = \iint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}(xy) - \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2y^2\right)\right] dx\, dy$$

onde

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le 1 \end{cases}$$

Ou seja

$$I = \int_0^1 \int_{x^2}^1 \left(y - 2x^2y\right) dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{y^2}{2} - x^2y^2 \bigg|_{x^2}^1 dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x^2 - \frac{x^4}{2} + x^6\right) dx$$

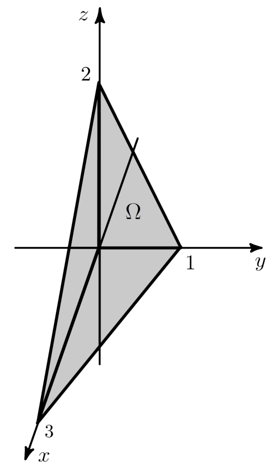
$$= \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{10} + \frac{x^7}{7}\right)\bigg|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{10} + \frac{1}{7}$$

$$= \frac{22}{105}$$

■

Exercício 4 *Observe que a região dada possui o seguinte esboço*



Desta forma, segue-se que o fluxo que desejamos calcular será

$$\tau = \iint_\sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Como se trata de uma região fechada, o ***Teorema da Divergência*** *nos garante que*

$$\iint_\sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_\Omega \operatorname{div} \mathbf{F}\, dx\, dy\, dz$$

$$= \iiint_\Omega \left[\frac{\partial(6x)}{\partial x} + \frac{\partial(3y)}{\partial y} + \frac{\partial(2x)}{\partial z}\right] dx\, dy\, dz$$

$$= \iiint_\Omega (6+3)\, dx\, dy\, dz$$

$$= 9 \iiint_\Omega dx\, dy\, dz$$

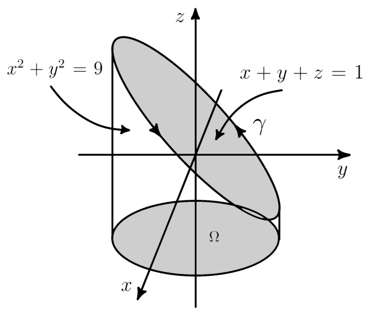
$$= 9\, \text{Volume}(\Omega)$$

Como Ω é um tetraedro, segue-se que

$$\iint_\sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = 9 \frac{1}{3} \frac{3 \cdot 1}{2} 2 = 9$$

■

Exercício 5 *Realizando um esboço da região em questão obtemos a seguinte figura*



Observe que

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = (0, x^2, y^2)$$

e a superfície σ em questão, pode ser parametrizada da seguinte forma

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 1 - u - v \end{cases} ; \underbrace{u^2 + v^2 \leq 9}_{\Omega}$$

Ou seja

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = (1, 0, -1)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v} = (0, 1, -1)$$

e

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} = (1, 1, 1)$$

Logo,

$$n = \frac{(1,1,1)}{\|(1,1,1)\|}$$

Assim, usando o ***Teorema de Stokes****, temos que*

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\Gamma = \iint_{\sigma} \operatorname{rot}\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

$$= \iint_{\Omega} \operatorname{rot}\mathbf{F}\,(\sigma(u,v)) \cdot \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} \sqrt{3} du\, dv$$

$$= \iint_{\Omega} \operatorname{rot}\mathbf{F}\,(u, v, 1-u-v) \cdot (1,1,1) du\, dv$$

$$= \iint_{\Omega} (0, u^2, v^2)(1,1,1) du\, dv$$

$$= \iint_{\Omega} \left(u^2 + v^2\right) du\, dv$$

Usando coordenadas polares, ou seja

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$J = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right| = r$$

O conjunto Ω, neste referencial, torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq r \leq 3 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

e disto, segue-se que

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\Gamma = \int_0^3 \int_0^{2\pi} r^2 r d\theta\, dr$$

$$= \int_0^3 r^3 \theta \Big|_0^{2\pi} dr$$

$$= 2\pi \int_0^3 r^3 dr$$

$$= \frac{\pi r^4}{2} \Big|_0^3$$

$$= \frac{81\pi}{2}$$

$\blacksquare$

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III - Turma A3

Prof^{o}. Edson

1ª Prova **2º Semestre** **2013**

Data: 04 de Dezembro **Duração: 14:00 - 16:00**

Problema 1 *Calcule a integral*

$$\iint_{\Omega}\left(\sqrt{x-2y}+\frac{1}{4}y^2\right)dx\,dy$$

onde Ω *é o triângulo delimitado pelos pontos* $(0,0),(4,0)$ *e* $(4,2)$.

Problema 2 *Calcule as integrais:*

a). $\displaystyle\int_0^2\int_x^2 2y^2\operatorname{sen}(xy)dy\,dx$;

b). $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_x^{\pi}\frac{\operatorname{sen} y}{y}dy\,dx$.

Problema 3 *Calcule o volume do da região do sólido delimitado pelo cilindro* $x^2+y^2=1$ *e pelos planos* $y=z$, $x=0$, $z=0$, *que está no primeiro octante.*

Problema 4 *Calcule o volume da região do espaço que está dentro do cilindro* $x^2+y^2=4$ *e dentro do elipsóide* $4x^2+4y^2+z^2=64$.

Problema 5 *Determine o centro de massa da lâmina que tem a forma da região no primeiro quadrante, do disco* $x^2+y^2\leq 1$, *cuja densidade em cada ponto* (x,y) *é diretamente proporcional à distância deste ponto à origem.*

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^{o}. Edson

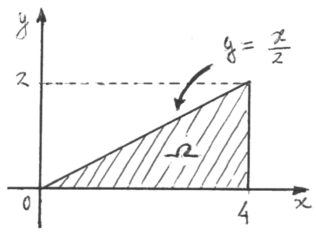
2^{o} Semestre

Gabarito 1ª Prova **2013**
Data: Quinta-feira, 23 de Janeiro **Turma A3**

Exercício 1 *Desejamos calcular a integral*

$$I = \iint_{\Omega} \left(\sqrt{x-2y} + \frac{1}{4}y^2 \right) dx\, dy$$

onde Ω é o triângulo esboçado na figura abaixo



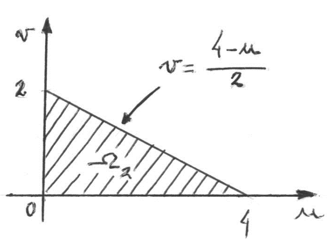
Para isto, considere a seguinte mudança de variáveis

$$\varphi^{-1} : \begin{cases} u = x - 2y \\ v = y \end{cases} \Leftrightarrow \varphi : \begin{cases} x = u + 2v \\ y = v \end{cases},$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = 1$$

e, neste novo referencial, o conjunto Ω torna-se



$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \le u \le 4 \\ 0 \le v \le \dfrac{4-u}{2} \end{cases}$$

e, disto segue-se que

$$I = \iint_{\Omega_2} \left(\sqrt{u} + \frac{1}{4}v^2 \right) du\, dv$$

$$= \int_0^4 \int_0^{\frac{4-u}{2}} \left(\sqrt{u} + \frac{1}{4}v^2 \right) dv\, du$$

$$= \int_0^4 \sqrt{u}v + \frac{1}{12}v^3 \Big|_0^{\frac{4-u}{2}} dv\, du$$

$$= \int_0^4 \left(-\frac{u^3}{96} + \frac{u^2}{8} - \frac{u}{2} + 2u^{\frac{1}{2}} - \frac{u^{\frac{3}{2}}}{2} + \frac{2}{3} \right) du$$

$$= \frac{74}{15}$$

■

Exercício 2

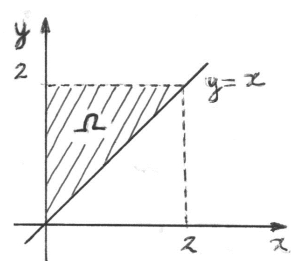
a). *Desejamos calcular a integral*

$$I = \int_0^2 \int_x^2 2y^2 \mathrm{sen}(xy)\, dy\, dx$$

Para isto, observe que o domínio de integração é

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ x \le y \le 2 \end{cases}$$

cujo gráfico pode ser esboçado da seguinte maneira



Observe porém, que o conjunto Ω pode também ser descrito da seguinte maneira

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Ou seja,

$$I = \int_0^2 \int_0^y 2y^2 \text{sen}(xy)\, dx\, dy$$

$$= -\int_0^2 2y \cos(xy) \Big|_0^y dy$$

$$= -\int_0^2 2y \left[\cos(y^2) - 1\right] dy$$

$$= -\,\text{sen}(y^2) + y^2 \Big|_0^2$$

$$= 4 - \text{sen}\, 4$$

□

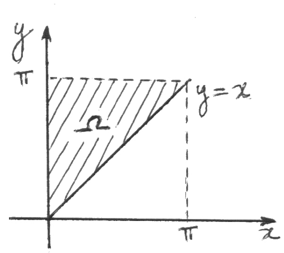
b). *Desejamos agora, calcular a seguinte integral*

$$\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\text{sen}\, y}{y} dy\, dx$$

De modo semelhante ao que foi feito no item anterior, observe que o domínio de integração é o conjunto

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq \pi \\ x \leq y \leq \pi \end{cases}$$

cujo esboço é dado pela seguinte figura



Observe que o conjunto Ω pode também ser descrito na forma

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq y \leq \pi \end{cases}$$

Assim,

$$\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\text{sen}\, y}{y} dy\, dx = \int_0^\pi \int_0^y \frac{\text{sen}\, y}{y} dx\, dy$$

$$= \int_0^\pi \frac{\text{sen}\, y}{y}\; x \Big|_0^y dy$$

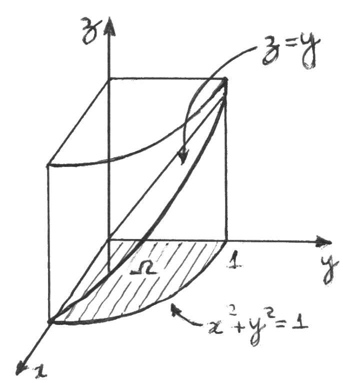
$$= \int_0^\pi \frac{\text{sen}\, y}{y} y\, dy$$

$$= -\cos\, y \Big|_0^\pi$$

$$= 2$$

■

Exercício 3 *Esboçando o sólido em questão, temos a seguinte figura*



donde segue-se que o volume procurado é dado por

$$V = \iint_\Omega f(x, y) dx\, dy$$

onde Ω é o conjunto dos pontos (x, y) tais que $x^2 + y^2 \leq 1$ com $x \geq 0$ e $y \geq 0$ e

$$f(x, y) = y$$

Usando coordenadas polares, tome

$$\begin{cases} x = r \cos\theta \\ y = r\, \text{sen}\, \theta \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$|J| = r$$

e, neste sistema de coordenadas, o conjunto Ω torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$$

$$V = \iint_{\Omega} y dx\, dy$$

$$= \iint_{\Omega_2} r \operatorname{sen}\theta\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\theta\, r^3 \Big|_0^1 d\theta$$

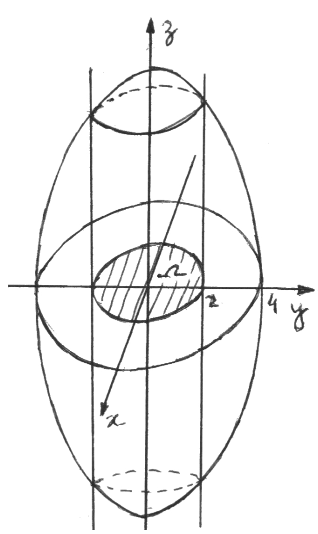
$$= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

$$= -\frac{1}{3}\cos\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{3}$$

■

Exercício 4 *Esboçando o sólido descrito no problema, obtemos a seguinte figura*



segue-se portanto, que o volume V deste sólido é dado por

$$V = \iint_{\Omega} f(x, y) dx\, dy$$

onde Ω é o conjuntos dos pontos (x, y) tais que

$$x^2 + y^2 \leq 4$$

e

$$f(x, y) = 2\sqrt{64 - 4x^2 - 4y^2}$$

$$= 2\sqrt{4\,(16 - x^2 - y^2)}$$

$$= 4\sqrt{16 - x^2 - y^2}$$

Usando coordenadas polares, tome

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$|J| = r$$

e, neste sistema de coordenadas, o conjunto Ω torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 2 \end{cases}$$

Logo,

$$V = \iint_{\Omega} 4\sqrt{16 - x^2 - y^2} dx\, dy$$

$$= \iint_{\Omega_2} 4r\sqrt{16 - r^2} dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 4r\sqrt{16 - r^2} dr\, d\theta$$

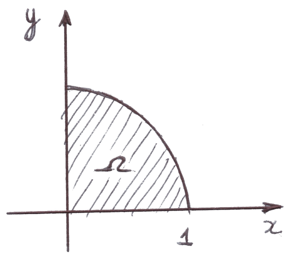
$$= -\frac{4}{3}\int_0^{2\pi} \left(16 - r^2\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 d\theta$$

$$= -\left(32\sqrt{3} - \frac{256}{3}\right)\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{512}{3}\pi - 64\pi\sqrt{3}$$

■

Exercício 5 *Observe que a lâmina que tem a forma da região no primeiro quadrante, do disco $x^2+y^2 \leq 1$ possui o seguinte esboço*



Sendo a densidade dessa lâmina em cada ponto (x, y) diretamente proporcional à distância deste ponto à origem, ou seja

$$\delta(x,y) = k\sqrt{x^2+y^2}$$

sua massa será dada por

$$M = \iint_{\Omega} \delta(x,y)dx\,dy$$

Usando coordenadas polares, ou seja

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$|J| = r$$

o conjunto Ω, neste sistema de coordenadas, torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} M &= \iint_{\Omega_2} k\,r^2 dr\,d\theta \\ &= k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^2 dr\,d\theta \\ &= \frac{k}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3\Big|_0^1 d\theta \\ &= \frac{k}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\ &= \frac{k\pi}{6} \end{aligned}$$

E, o centro de massa, será (x_c, y_c) onde

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{1}{M}\iint_{\Omega} x\delta(x,y)dx\,dy \\ &= \frac{6}{k\pi}\iint_{\Omega} kx\sqrt{x^2+y^2}dx\,dy \\ &= \frac{6}{\pi}\iint_{\Omega_2} r\cos\theta\, r^2 dr\,d\theta \\ &= \frac{6}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^3\cos\theta\,dr\,d\theta \\ &= \frac{6}{4\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, r^4\Big|_0^1 d\theta \\ &= \frac{6}{4\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta \\ &= \frac{6}{4\pi}\,\mathrm{sen}\,\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2\pi} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y_c &= \frac{1}{M}\iint_{\Omega} y\delta(x,y)dx\,dy \\ &= \frac{6}{k\pi}\iint_{\Omega} ky\sqrt{x^2+y^2}dx\,dy \\ &= \frac{6}{\pi}\iint_{\Omega_2} r\,\mathrm{sen}\,\theta\, r^2 dr\,d\theta \\ &= \frac{6}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^3\mathrm{sen}\,\theta\,dr\,d\theta \\ &= \frac{6}{4\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}\,\theta\, r^4\Big|_0^1 d\theta \\ &= \frac{6}{4\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}\,\theta\,d\theta \\ &= -\frac{6}{4\pi}\cos\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2\pi} \end{aligned}$$

concluímos, com isto, que o centro de massa da lâmina dada é o ponto $\left(\dfrac{3}{2\pi}, \dfrac{3}{2\pi}\right)$. ■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III - Turma A3

Prof^{o}. Edson

2^{a} Prova | **2^{o} Semestre** | **2013**

Data: 12 de Fevereiro de 2014 | **Duração: 14:00 - 16:00**

Problema 1 *Calcule a integral*

$$\iiint_{\Omega} \sqrt{x+y}\,\sqrt[3]{x+2y-z}\,dx\,dy\,dz$$

onde Ω *é a região* $1 \leq x+y \leq 2$, $0 \leq x+2y-z \leq 1$ *e* $0 \leq z \leq 1$.

Problema 2 *Calcule as integrais:*

a). $\displaystyle\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{a^2-x^2-y^2} x^2\,dz\,dy\,dx\;(a>0)$;

b). $\displaystyle\int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} \int_{-\sqrt{9-x^2-y^2}}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz\,dx\,dy$.

Problema 3 *Considere o cilindro homogêneo*

$$(x-a)^2+y^2 \leq a^2,\; 0 \leq z \leq h$$

onde a *e* h *são números reias positivos. Calcule seu momento de inércia em relação ao eixo* Oz.

Problema 4 *Determine o trabalho realizado pelo campo de força*

$$\mathbf{F}(x,y) = x^2\mathbf{i} + ye^x\mathbf{j}$$

em uma partícula que se move sobre a parábola $x = y^2+1$ *do ponto* $(1,0)$ *ao ponto* $(2,1)$.

Problema 5 *Um areme fino é entortado no formato da semicircunferência* $x^2+y^2=4$, $x \geq 0$. *Se a densidade linear for uma constante* $\mathbf{k}$, *determine a massa e o centro de massa do arame.*

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Profº. Edson

2º Semestre

Gabarito 2ª Prova **2013**
Data: Sexta-feira, 28 de Abril **Turma A3**

Exercício 1 *Desejamos calcular a integral*

$$I = \iiint_\Omega \sqrt{x+y}\,\sqrt[3]{x+2y-z}\,dx\,dy\,dz$$

Para isto, considere a seguinte mudança de variáveis

$$\varphi^{-1} : \begin{cases} u = x+y \\ v = x+2y-z \\ w = z \end{cases}$$

Observe que

$$\varphi : \begin{cases} x = 2u - v - w \\ y = -u + v + w \\ z = w \end{cases}$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = 1$$

e, neste referencial, o conjunto

$$\Omega : \begin{cases} 1 \le x+y \le 2 \\ 0 \le x+2y-z \le 1 \\ 0 \le z \le 1 \end{cases}$$

torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 1 \le u \le 2 \\ 0 \le v \le 1 \\ 0 \le w \le 1 \end{cases}$$

Portanto, segue-se que

$$I = \iiint_{\Omega_2} \sqrt{u}\,\sqrt[3]{v}\,|J|\,du\,dv\,dw$$

$$= \int_1^2 \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{u}\,\sqrt[3]{v}\,dw\,dv\,du$$

$$= \int_1^2 \int_0^1 \sqrt{u}\,\sqrt[3]{v}w\,\Big|_0^1 dv\,du$$

$$= \int_1^2 \int_0^1 \sqrt{u}\,\sqrt[3]{v}\,dv\,du$$

$$= \int_1^2 \frac{3}{4}\sqrt{u}v^{\frac{4}{3}}\,\Big|_0^1 du$$

$$= \int_1^2 \frac{3}{4}\sqrt{u}\,du$$

$$= \frac{1}{2}u^{\frac{3}{2}}\,\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{8}-1\right) = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$$

■

Exercício 2

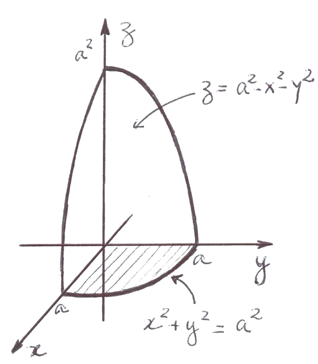
a). *Desejamos calcular a integral*

$$A = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{a^2-x^2-y^2} x^2\,dz\,dy\,dx$$

Para isto, observe que o domínio de integração é

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le x \le a \\ 0 \le y \le \sqrt{a^2-x^2} \\ 0 \le z \le a^2 - x^2 - y^2 \end{cases}$$

cujo gráfico pode ser esboçado da seguinte maneira



Usando coordenadas cilíndricas, ou seja

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases}$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| = r$$

O conjunto Ω torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq r \leq a \\ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leq z \leq a^2 - r^2 \end{cases}$$

e disto, segue-se que

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a\int_0^{a^2-r^2} r^2\cos^2\theta\ |J|\ dz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^2\cos^2\theta\, r\, z\ \Big|_0^{a^2-r^2}\ dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^3\cos^2\theta\left(a^2-r^2\right)dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a \cos^2\theta\left(a^2r^3-r^5\right)dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\left(a^2\frac{r^4}{4}-\frac{r^6}{6}\right)\Big|_0^a d\theta$$

$$= \frac{a^6}{12}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta$$

$$= \frac{a^6}{24}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos 2\theta + 1\right)d\theta$$

$$= \frac{a^6}{24}\left(\frac{\operatorname{sen}2\theta}{2}+\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi a^6}{48}$$

□

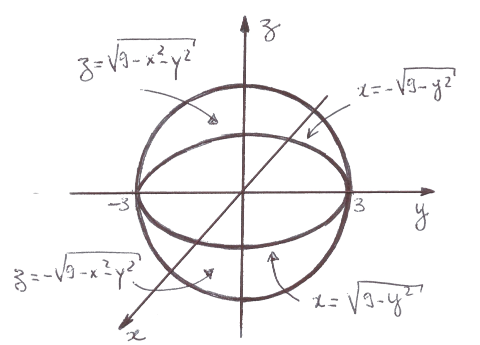
b). *Desejamos agora, calcular a seguinte integral*

$$B = \int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}}\int_{-\sqrt{9-x^2-y^2}}^{-\sqrt{9-x^2-y^2}} dz\,dx\,dy$$

e, o domínio de integração, neste caso é o conjunto

$$\Omega : \begin{cases} -\sqrt{9-y^2} \leq x \leq \sqrt{9-y^2} \\ -3 \leq y \leq 3 \\ -\sqrt{9-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{9-x^2-y^2} \end{cases}$$

cujo esboço é dado pela seguinte figura



Usando coordenadas esféricas, ou seja

$$\begin{cases} x = \rho\operatorname{sen}\varphi\cos\theta \\ y = \rho\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}\right| = \rho^2\operatorname{sen}\varphi$$

o conjunto Ω, neste referencial, torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 \leq \rho \leq 3 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Assim, segue-se que

$$B = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{3}\rho\,|\,J|\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^3 \rho^3 \operatorname{sen}\varphi \, d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\varphi \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^3 d\theta\, d\varphi$$

$$= \frac{81}{4}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\varphi \, d\theta\, d\varphi$$

$$= \frac{81}{4}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\varphi \left.\theta\right|_0^{2\pi} d\varphi$$

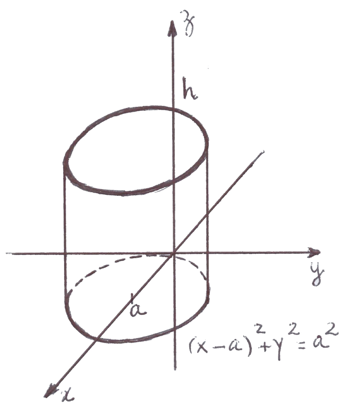
$$= \frac{81}{4}\int_0^{\pi} 2\operatorname{sen}\varphi \, d\varphi$$

$$= -\frac{81\pi}{2}\cos\theta\Big|_0^{\pi}$$

$$= 81\pi$$

■

Exercício 3 *Um esboço possível para o sólido em questão é dado na figura abaixo*



A distância de um ponto qualquer $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ *ao eixo Oz, é dada por*

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

e, o momento de inércia procurado é então

$$I = \iiint_{\Omega} r^2 \delta dx\, dy\, dz$$

onde $\delta(x,y,z) = k$, $k \in \mathbb{R}$, *é a densidade do sólido dado.*

Usando coordenadas cilíndricas, ou seja

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$|J| = \rho$$

o conjunto Ω *torna-se*

$$\Omega_2 : \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le \rho \le 2a\cos\theta \\ 0 \le z \le h \end{cases}$$

Portanto

$$I = \iint_{\Omega_2} r^2\, k\, |J|\, d\rho\, d\theta\, dz$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^h\int_0^{2a\cos\theta} \rho^2\, k\, \rho\, d\rho\, dz\, d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^h k\left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^{2a\cos\theta} dz\, d\theta$$

$$= 4ka^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^h \cos^4\theta\, dz\, d\theta$$

$$= 4ka^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\, z\Big|_0^h d\theta$$

$$= 4ka^4 h\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta$$

$$= 4ka^4 h\left(\frac{3}{8}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta + \frac{1}{32}\sin 4\theta\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{3}{2}k\pi a^4 h$$

■

Exercício 4 *O trecho da parábola* $x = y^2 + 1$ *do ponto* $(1,0)$ *ao ponto* $(2,1)$ *pode ser parametrizado da seguinte forma*

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = t^2+1 \\ y(t) = t \end{cases}, \; 0 \le t \le 1$$

e o trabalho em questão, é dado por

$$\tau = \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\gamma$$

onde

$$\mathbf{F}(x,y) = x^2\mathbf{i} + ye^x\mathbf{j}$$

ou seja,

$$\tau = \int_0^1 \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt$$

$$= \int_0^1 \mathbf{F}(t^2+1,t) \cdot (2t,1)\,dt$$

$$= \int_0^1 \left(\left(t^2+1\right)^2, te^{t^2+1}\right) \cdot (2t,1)\,dt$$

$$= \int_0^1 \left[2t\left(t^2+1\right)^2 + te^{t^2+1}\right] dt$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{e}{2} + \frac{7}{3}$$

■

Exercício 5 *Uma parametrização possível para a semicircunferência* $x^2+y^2=4$, $x \geq 0$ *é dada por*

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = 2\operatorname{sen} t \end{cases}, -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

e, calculando a massa do arame neste formato e de densidade homogênea

$$\delta(x,y) = k$$

teremos

$$M = \int_\gamma \delta(x,y)ds$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} k\,\|\gamma'(t)\|\,dt$$

$$= k\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2dt$$

$$= 2k\pi$$

e, seu centro de massa terá coordenadas

$$x_c = \frac{\displaystyle\int_\gamma x\delta(x,y)ds}{M}$$

$$= \frac{1}{2k\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t\, k\,\|\gamma'(t)\|\,dt$$

$$= \frac{2k}{2k\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t dt$$

$$= \frac{4}{\pi}$$

e

$$y_c = \frac{\displaystyle\int_\gamma y\delta(x,y)ds}{M}$$

$$= \frac{1}{2k\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\operatorname{sen} t\, k\,\|\gamma'(t)\|\,dt$$

$$= \frac{2k}{2k\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\operatorname{sen} t\, dt$$

$$= 0$$

concluímos, com isto, que o centro de massa procurado é o ponto $\left(\frac{4}{\pi}, 0\right)$. ■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III - Turma A3

Prof$^{\text{o}}$. Edson

3ª Prova **2º Semestre** **2013**

Data: 12 de Março de 2014 **Duração: 14:00 - 16:00**

Problema 1 *Calcule a integral*

$$\oint_\gamma (1 - x^2 y)dx + \operatorname{sen} y \, dy$$

onde γ *é a fronteira da região entre os quadrados de vértices* $(\pm 2, \pm 2)$ *e* $(\pm 1, \pm 1)$.

Problema 2 *Calcule a integral*

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\gamma$$

onde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy + z^2)\mathbf{i} + (x^2 - 2yz)\mathbf{j} + (2xz - y^2)\mathbf{k}$$

e γ *é o arco da curva correspondente à interseção da esfera* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ *com o plano* $x = 0$, *do ponto* $(0, 1, 0)$ *ao ponto* $(0, 0, 1)$.

Problema 3 *Calcule a massa da lâmina homogênea correspondente à região da superfície* $2z = x^2 + y^2$ *dentro do cilindro* $x^2 + y^2 = 8$.

Problema 4 *Calcule o fluxo do campo vetorial*

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + yx\mathbf{j} + zx\mathbf{k}$$

através da região do plano $6x + 3y + 2z = 6$ *no primeiro octante, orientada por vetores normais para cima.*

Problema 5 *Calcule*

$$\iint_\sigma \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

onde $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$ *e* σ *é a região da superfície* $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ *com* $\sqrt{2} \leq z \leq \sqrt{3}$, $y \geq 0$ *e vetor normal apontando para cima.*

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^{o}. Edson

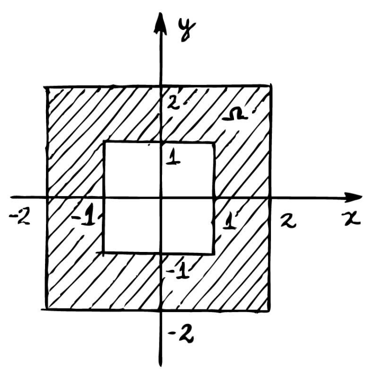
2^{o} Semestre

Gabarito 3ª Prova **2013**
Data: Quinta-feira, 22 de Junho **Turma A3**

Exercício 1 *Considere*

$$I = \oint_{\gamma} (1 - x^2 y)dx + \operatorname{sen} y\, dy$$

Observe na figura abaixo que a curva γ e o conjunto Ω que consiste no interior de γ, obedecem às condições necessárias ao uso do ***Teorema de Green****.*



E assim, usando-o, teremos que

$$I = \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{sen} y) - \frac{\partial}{\partial x} \left(1 - x^2 y\right) \right] dx\, dy$$

$$= \iint_{\Omega} x^2 dx\, dy$$

Onde

$$\Omega = R_M - R_m$$

com

$$R_M : \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ -2 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

$$R_m : \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

ou seja,

$$I = \iint_{R_M} x^2 dx\, dy - \iint_{R_m} x^2 dx\, dy$$

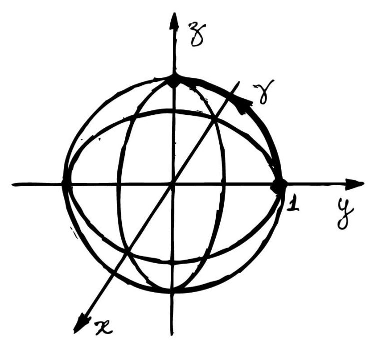
$$= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} x^2 dxdy - \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^2 dxdy$$

$$= \frac{64}{3} - \frac{4}{3}$$

$$= 20$$

■

Exercício 2 *Uma parametrizaçãopossívelpara a curva γ é dada por*



$$\gamma : \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = \cos t \quad ; 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ z(t) = \operatorname{sen} t \end{cases}$$

e com isto, temos que

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\gamma = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{F}(0, \cos t, \operatorname{sen} t) \cdot (0, -\operatorname{sen} t, \cos t)\ dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{sen}^2 t, -2\cos t \operatorname{sen} t, -\cos^2 t\right) \cdot$$
$$\cdot (0, -\operatorname{sen} t, \cos t)\ dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2\cos t \operatorname{sen}^2 t - \cos^3 t\right) dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[2\cos t \operatorname{sen}^2 t - \left(1 - \operatorname{sen}^2 t\right)\cos t\right] dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(3\cos t \operatorname{sen}^2 t - \cos t\right) dt$$

$$= \left(\operatorname{sen}^3 t - \operatorname{sen} t\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 0$$

■

(Outro modo de resolver este exercício)

Observe que, sendo

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (2xy + z^2)\mathbf{i} + (x^2 - 2yz)\mathbf{j} + (2xz - y^2)\mathbf{k}$$

teremos

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}(x,y,z) = 0$$

e como $D_{\mathbf{F}} = \mathbb{R}^3$ (simplesmente conexo), segue-se que F é um campo conservativo em todo o $\mathbb{R}^3$ e portanto, a integral em questão é independente do caminho. Desta forma, tomando o caminho

$$\bar{\gamma} = \gamma_1 \cup \gamma_2$$

onde

$$\gamma_1 : \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = 1 - t \quad ; 0 \le t \le 1 \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = 0 \quad ; 0 \le t \le 1 \\ z(t) = t \end{cases}$$

E assim, temos que

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\gamma = \int_{\bar{\gamma}} \mathbf{F} \cdot d\bar{\gamma}$$

$$= \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\gamma_1 + \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\gamma_2$$

$$= \int_0^1 \mathbf{F}(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t)dt + \int_0^1 \mathbf{F}(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t)dt$$

$$= \int_0^1 \mathbf{F}(0, 1-t, 0) \cdot (0, -1, 0)dt +$$
$$+ \int_0^1 \mathbf{F}(0, 0, t) \cdot (0, 0, 1)dt$$

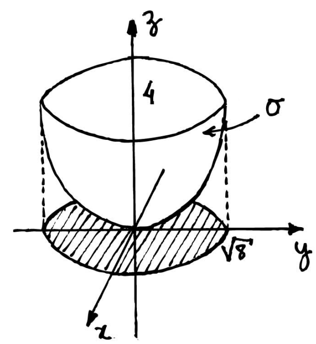
$$= \int_0^1 (0, 0, (1-t)^2) \cdot (0, -1, 0)dt +$$
$$+ \int_0^1 (t^2, 0, 0) \cdot (0, 0, 1)dt$$

$$= \int_0^1 0dt + \int_0^1 0dt$$

$$= 0$$

■

Exercício 3 *Realizando um esboço da superfície que corresponde à lâmina em questão temos a seguinte figura*



Uma parametrização possível desta superfície é dada por

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2\right) \end{cases} ; \underbrace{u^2 + v^2 \le 8}_{\Omega}$$

e, sua massa, considerando sua densidade $\delta(x,y,z) = k$, $k \in \mathbb{R}$, *pode ser obtida através da seguinte integral*

$$A = \iint_\sigma \delta(x,y,z)dS$$

$$= k\iint_\Omega \left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u} \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}\right\| du\,dv$$

Observe porém que

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u} = (1,0,u)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial v} = (0,1,v)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u} \times \frac{\partial\sigma}{\partial v} = (-u,-v,1)$$

$$\left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u} \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}\right\| = \sqrt{u^2+v^2+1}$$

ou seja

$$A = k\iint_\Omega \sqrt{u^2+v^2+1}du\,dv$$

Usando coordenadas polares

$$\begin{cases} u = r\cos\theta \\ v = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,\theta)}\right| = r$$

o conjunto Ω *torna-se*

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \le r \le \sqrt{8} \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

e disto segue-se que

$$A = k\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{8}} r\sqrt{r^2+1}dr\,d\theta$$

$$= k\int_0^{2\pi}\int_1^{9}\frac{1}{2}\sqrt{w}dw\,d\theta$$

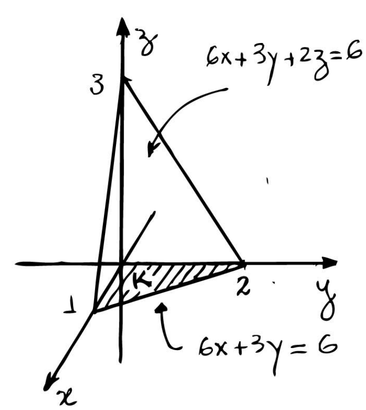
$$= k\int_0^{2\pi}\frac{1}{3}\sqrt{w^3}\Big|_1^9 d\theta$$

$$= k\int_0^{2\pi}\frac{26}{3}d\theta$$

$$= \frac{52k\pi}{3}$$

■

Exercício 4 *Um esboço possível da superfície em questão é dado pela figura abaixo*



e, uma parametrização possível para esta superfície é

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \frac{1}{2}(6-6u-3v) \end{cases} \quad ; (u,v) \in K$$

Observe que

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u} = (1,0,-3)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial v} = \left(0,1,-\frac{3}{2}\right)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}=\left(3,\frac{3}{2},1\right)$$

Como estamos interessados no vetor normal que aponta para cima (componente z positiva), segue-se que

$$\mathbf{n}=\frac{\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}}{\left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right\|}$$

e assim, segue-se que

$$\iint_\sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS=\iint_K \mathbf{F}(\sigma(u,v))\cdot\mathbf{n}\left\|\frac{\partial\sigma}{\partial v}\times\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right\|du\,dv$$

$$=\iint_K \mathbf{F}(\sigma(u,v))\cdot\left(\frac{\partial\sigma}{\partial v}\times\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)du\,dv$$

$$=\iint_K \mathbf{F}\left(u,v,\frac{1}{2}(6-6u-3v)\right)\cdot$$
$$\cdot\left(3,\frac{3}{2},1\right)du\,dv$$

$$=\iint_K 3u du\,dv$$

Onde

$$K:\begin{cases}0\le u\le 1\\ 0\le v\le 2-2u\end{cases}$$

e com isto, temos que

$$\iint_\sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS=\int_0^1\int_0^{2-2u}3u\,dv\,du$$

$$=\int_0^1 3uv\Big|_0^{2-2u}du$$

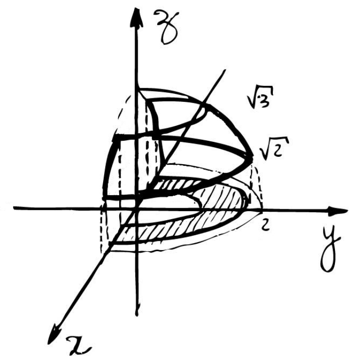
$$=3\int_0^1\left(2u-2u^2\right)du$$

$$=3\left(u^2-\frac{2}{3}u^3\right)\Big|_0^1$$

$$=1$$

■

Exercício 5 *Realizando um esboço da superfície dada, obtemos a seguinte figura*



e, uma parametrização possível para esta superfície é dada por

$$\sigma:\begin{cases}x(t)=2\text{sen}\,u\cos v\\ y(t)=2\,\text{sen}\,u\,\text{sen}\,v\quad;\,(u,v)\in\Omega\\ z(t)=2\cos u\end{cases}$$

onde

$$\Omega:\begin{cases}\frac{\pi}{6}\le u\le\frac{\pi}{4}\\ 0\le v\le\pi\end{cases}$$

Portanto,

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}=(2\cos u\cos v,2\cos u\,\text{sen}\,v,-2\,\text{sen}\,u)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial v}=(-2\text{sen}\,u\,\text{sen}\,v,2\,\text{sen}\,u\,\cos v,0)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}=\left(4\cos v\text{sen}^2u,4\,\text{sen}^2u\,\text{sen}\,v,4\cos u\,\text{sen}\,u\right)$$

Observe que $4\cos u\,\text{sen}\,u\ge 0$ *quando* $(u,v)\in\Omega$*, ou seja o vetor normal à superfície* σ *apontando para cima é dado por*

$$n=\frac{\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}}{\left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right\|}$$

Além disto, observe que, sendo

$$\mathbf{F}(x,y,z)=-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}+x^2\mathbf{k}$$

tem-se

$$\text{rot}\,\mathbf{F}(x,y,z)=(0,-2x,2)$$

Assim,

$$\iint_\sigma \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_\Omega \operatorname{rot}\mathbf{F}(\sigma(u,v))\cdot \cdot\,\mathbf{n}\left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right\| du\,dv$$

$$= \iint_\Omega \operatorname{rot}\mathbf{F}(\sigma(u,v))\cdot\mathbf{n}\,du\,dv$$

$$= \iint_\Omega (0,-4\operatorname{sen}u\cos v,2)\cdot(4\cos v\operatorname{sen}^2u, 4\operatorname{sen}^2u\operatorname{sen}v, 4\cos u\operatorname{sen}u)\,du\,dv$$

$$= \iint_\Omega (-16\cos v\operatorname{sen}v\operatorname{sen}^3u + 8\cos u\operatorname{sen}u)du\,dv$$

$$= \int_0^\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (-16\cos v\operatorname{sen}v\operatorname{sen}^3u + 8\cos u\operatorname{sen}u)du\,dv$$

$$= \pi$$

$\square$

(Outro modo de se resolver este exercício)

Uma parametrização possível para a superfície em questão seria

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{4-u^2-v^2} \end{cases} ; \underbrace{1\le u^2+v^2\le 2, v\ge 0}_{\Omega}$$

Observe que

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u} = \left(1,0,\frac{-u}{\sqrt{4-u^2-v^2}}\right)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial v} = \left(0,1,\frac{-v}{\sqrt{4-u^2-v^2}}\right)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v} = \left(\frac{u}{\sqrt{-u^2-v^2+4}},\frac{v}{\sqrt{-u^2-v^2+4}},1\right)$$

Como estamos interessados no vetor normal apontando para cima segue-se que

$$n = \frac{\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}}{\left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right\|}$$

lém disto, observe que, sendo

$$\mathbf{F}(x,y,z) = -y\mathbf{i}+x\mathbf{j}+x^2\mathbf{k}$$

tem-se

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}(x,y,z) = (0,-2x,2)$$

e, disto segue-se que

$$\iint_\sigma \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_\Omega \operatorname{rot}\mathbf{F}(\sigma(u,v))\cdot\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right)du\,dv$$

$$= 2\iint_\Omega\left(\frac{-uv}{\sqrt{4-u^2-v^2}}+1\right)du\,dv$$

Usando coordenadas polares,

$$\begin{cases} u = r\cos\theta \\ v = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,\theta)}\right| = r$$

o conjunto Ω torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 1\le r\le\sqrt{2} \\ 0\le\theta\le\pi \end{cases}$$

e com isto, temos que

$$\iint_\sigma \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = 2\iint_{\Omega_2}\left(\frac{-r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{4-r^2}}+1\right)r dr\,d\theta$$

$$= 2\int_0^\pi\int_1^{\sqrt{2}}\left(\frac{-r^3\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{4-r^2}}+r\right)dr\,d\theta$$

$$= \pi$$

$\blacksquare$

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III - Turma A3

Prof^o. Edson

Prova Final **2^o Semestre** **2013**

Data: 19 de Março de 2014 **Duração: 14:00 - 16:00**

Problema 1 *Calcule as integrais*

a). $\displaystyle\int_0^9 \int_{\sqrt{y}}^3 \operatorname{sen}(x^3)\, dx\, dy$;

b). $\displaystyle\int_0^2 \int_x^2 y^4 \cos(xy^2)\, dy\, dx$.

Problema 2 *Calcule o volume do sólido limitado pela superfície* $y = x^2$ *e pelos planos* $z = 0$ *e* $y + z = 1$.

Problema 3 *Calcule a integral*

$$\oint_\gamma \left(y + e^{\sqrt{x}}\right) dx + \left(2x + \cos y^2\right)\, dy$$

onde γ *é a fronteira da região delimitada pelas curvas* $y = x^2$ *e* $x = y^2$.

Problema 4 *Calcule o fluxo do campo vetorial*

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\,\mathbf{i} + 2yz\,\mathbf{j} + 3z\,\mathbf{k}$$

através da fronteira da região delimitada pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ *e* $x + y + z = 1$. *(Considere o vetor normal apontando para fora).*

Problema 5 *Calcule*

$$\iint_\sigma \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

onde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} - 2\,\mathbf{k}$$

e σ *é a região do cone* $z^2 = x^2 + y^2$ *com* $0 \le z \le 4$ *e vetor normal apontando para baixo.*

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^o. Edson

2^o Semestre

Gabarito Prova Final **2013**
Data: 25 de Março de 2014 **Turma A3**

Exercício 1

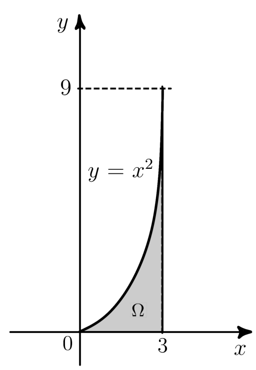
a). *Desejamos calcular a integral*

$$\int_0^9 \int_{\sqrt{y}}^3 \operatorname{sen}\left(x^3\right) dx\, dy$$

Para isto, observe que o domínio de integração é

$$\Omega : \begin{cases} \sqrt{y} \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 9 \end{cases}$$

cujo gráfico pode ser esboçado da seguinte maneira



Observe que o conjunto Ω também pode ser expresso da seguinte forma

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq x^2 \end{cases}$$

Portanto

$$\int_0^9 \int_{\sqrt{y}}^3 \operatorname{sen}\left(x^3\right) dx\, dy = \int_0^3 \int_0^{x^2} \operatorname{sen}\left(x^3\right) dy\, dx$$

$$= \int_0^3 \operatorname{sen}\left(x^3\right)\, y\Big|_0^{x^2} dx$$

$$= \int_0^3 x^2 \operatorname{sen}\left(x^3\right) dx$$

$$= -\frac{1}{3}\cos\left(x^3\right)\Big|_0^3$$

$$= \frac{1-\cos(27)}{3}$$

□

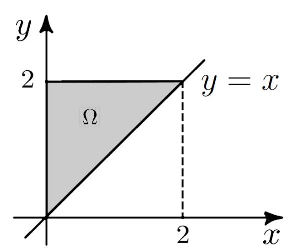
b). *Desejamos agora, calcular a integral*

$$\int_0^2 \int_x^2 y^4 \cos\left(xy^2\right) dy\, dx$$

Observe, no entanto, que seu domínio de integração é dado por

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x \leq y \leq 2 \end{cases}$$

que está esboçado na seguinte figura



Disto segue-se que Ω também pode ser expresso da seguinte maneira

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Ou seja,

$$\int_0^2\int_x^2 y^4\cos\left(xy^2\right)dy\,dx = \int_0^2\int_0^y y^4\cos\left(xy^2\right)dx\,dy$$

$$= \int_0^2 y^4\left.\frac{\operatorname{sen}\left(xy^2\right)}{y^2}\right|_0^y dy$$

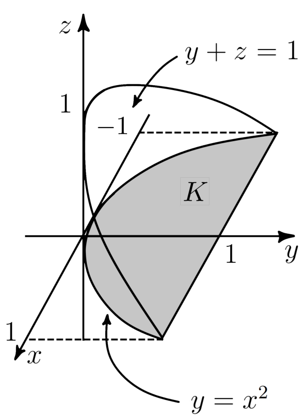
$$= \int_0^2 y^2\operatorname{sen}\left(y^3\right)\,dy$$

$$= -\left.\frac{\cos\left(y^3\right)}{3}\right|_0^2$$

$$= \frac{1-\cos(8)}{3}$$

■

Exercício 2 *Realizando um esboço do sólido em questão, obtemos a seguinte figura*



Portanto, o volume procurado é dado por

$$V = \iint_K\int_0^{1-y} dz\,dx\,dy$$

sendo

$$K : \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le 1 \end{cases}$$

Ou seja,

$$V = \iint_K\int_0^{1-y} dz\,dx\,dy$$

$$= \iint_K \left. z\right|_0^{1-y} dx\,dy$$

$$= \iint_K (1-y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-1}^1\int_{x^2}^1 (1-y)\,dy\,dx$$

$$= \int_{-1}^1 \left.\left(y-\frac{y^2}{2}\right)\right|_{x^2}^1 dy$$

$$= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}-x^2+\frac{x^4}{2}\right)dx$$

$$= \left.\left(\frac{x}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}\right)\right|_{-1}^1$$

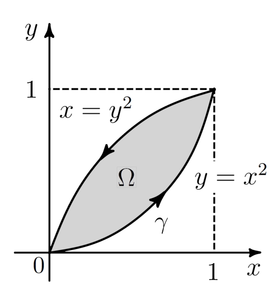
$$= \frac{8}{15}$$

■

Exercício 3 *Desejamos calcular*

$$I = \oint_\gamma \left(y+e^{\sqrt{x}}\right)dx + \left(2x+\cos\left(y^2\right)\right)dy$$

Realizando um esboço da região delimitada pelas curvas dadas, obtemos a seguinte figura



Como trata-se de uma curva fechada, o ***Teorema de Green*** *nos garante que*

$$I = \iint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(2x+\cos\left(y^2\right)\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(y+e^{\sqrt{x}}\right)\right]dx\,dy$$

onde

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le \sqrt{x} \end{cases}$$

Ou seja

$$I = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (2-1)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 y \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx$$

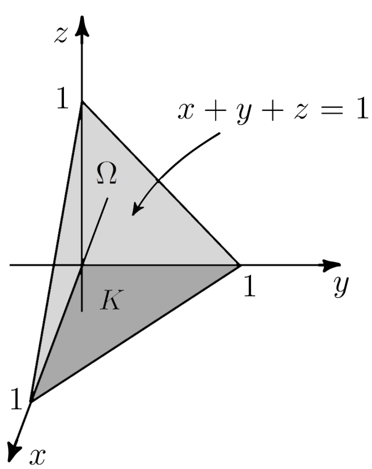
$$= \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx$$

$$= \frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{3}$$

■

Exercício 4 *Observe que a região dada possui o seguinte esboço*



Desta forma, o fluxo que desejamos calcular será

$$\tau = \iint_\sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

*Como trata-se de uma região fechada, o **Teorema da Divergência** nos garante que*

$$\iint_\sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_\Omega \operatorname{div} \mathbf{F}\, dx\, dy\, dz$$

$$= \iiint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}(2x) + \frac{\partial}{\partial y}(2yz) + \frac{\partial}{\partial z}(3z)\right] dx\, dy\, dz$$

$$= \iiint_\Omega (2 + 2z + 3)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \iint_K \int_0^{1-x-y} (5 + 2z)\, dz\, dx\, dy$$

sendo

$$K : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 - y \end{cases}$$

Ou seja

$$\iint_\sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_K \left(5z + z^2\right)\Big|_0^{1-x-y} dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[5\,(1-x-y) + (1-x-y)^2\right] dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(x^2 + y^2 + 2xy - 7x - 7y + 6\right) dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} + xy^2 - 7xy - \frac{7y^2}{2} + 6y\right)\Big|_0^{1-x} dx$$

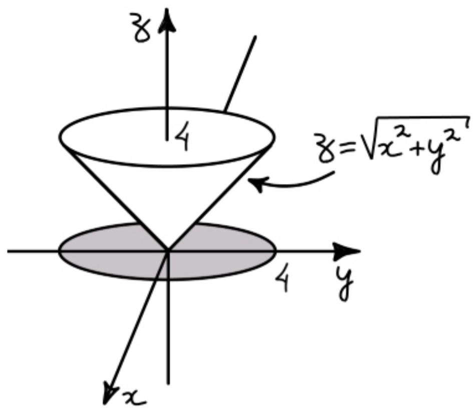
$$= \int_0^1 \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 6x + \frac{17}{6}\right) dx$$

$$= \left(-\frac{1}{12}x^4 + \frac{7}{6}x^3 - 3x^2 + \frac{17}{6}x\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{11}{12}$$

■

Exercício 5 *Realizando um esboço da região em questão obtemos a seguinte figura*



Observe que a fronteira desta região é a curva dada pela seguinte parametrização

$$\Gamma : \begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 4\text{sen}\, t \quad ; 0 \leq t \leq 2\pi \\ z = 4 \end{cases}$$

Assim, usando o ***Teorema de Stokes****, temos que*

$$\iint_\sigma \text{rot}\, \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\Gamma$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}\,(4\cos t, 4\text{sen}\, t, 4) \cdot (-4\text{sen}\, t, 4\cos t, 0)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-4\text{sen}\, t, 4\cos t, -2) \cdot (-4\text{sen}\, t, 4\cos t, 0)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(16\text{sen}^2 t + 16\cos^2 t\right) dt$$

$$= 16 \int_0^{2\pi} dt$$

$$= 32\pi$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III - Turma A3

Prof^o. Edson

1ª Prova | **2º Semestre** | **2015**

Data: 01 de Dezembro | **Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Calcule as integrais:*

a). $\displaystyle\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \text{sen}\,(\pi\, y^3)\, dy\, dx$;

b). $\displaystyle\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 \cos(x^2) dx\, dy$.

Problema 2 *Calcule a integral*

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\, dx\, dy$$

Problema 3 *Calcule o volume da região delimitada pelos cilindros* $x^2+y^2=25$ *e* $x^2+z^2=25$.

Problema 4 *Calcule a integral*

$$\iint_\Omega e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy$$

onde Ω *é a região do plano* xy *delimitada pela curva* $x^2+y^2=1$.

Problema 5 *Encontre a massa da lâmina quadrada com vértices* $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ *e cuja densidade é proporcional ao quadrado da distância à origem.*

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof$^{\text{o}}$. Edson

2$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito 1ª Prova **2015**
Data: Terça-feira, 23 de Fevereiro **Turma A3**

Exercício 1

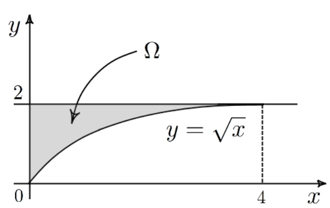
a). *Desejamos calcular a integral*

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \operatorname{sen}\left(\pi y^3\right) dy\, dx$$

Para o cálculo desta integral, procederemos com a inversão da ordem de integração. Para isto, precisamos inicialmente desenhar o conjunto onde desejamos efetuar esta integral. Chamando de Ω este conjunto, temos

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ \sqrt{x} \leq y \leq 2 \end{cases}$$

cujo desenho é esboçado na figura abaixo



Observe porém, que o conjunto Ω pode também ser descrito da seguinte maneira

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq y^2 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Logo,

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \operatorname{sen}\left(\pi y^3\right) dy\, dx = \int_0^2 \int_0^{y^2} \operatorname{sen}\left(\pi y^3\right) dx\, dy$$

$$= \int_0^2 \operatorname{sen}\left(\pi y^3\right) x \Big|_0^{y^2} dy$$

$$= \int_0^2 y^2 \operatorname{sen}\left(\pi y^3\right) dy$$

$$= -\frac{\cos\left(\pi y^3\right)}{3\pi}\Bigg|_0^2$$

$$= -\frac{\cos(8\pi)}{3\pi} + \frac{\cos(0)}{3\pi}$$

$$= -\frac{1}{3\pi} + \frac{1}{3\pi}$$

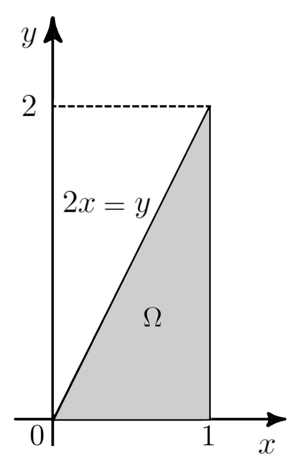
$$= 0$$

□

b). *Procedendo da mesma maneira como no item anterior, temos*

$$\Omega : \begin{cases} \dfrac{y}{2} \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

cujo esboço é dado pela seguinte figura



O conjunto Ω pode também ser descrito como

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2x \end{cases}$$

Ou seja

$$\int_0^2\int_{\frac{y}{2}}^1 \cos\left(x^2\right)dxdy = \int_0^1\int_0^{2x}\cos\left(x^2\right)dydx$$

$$= \int_0^1 \cos\left(x^2\right) y \Big|_0^{2x} dx$$

$$= \int_0^1 2x\cos\left(x^2\right) dx$$

$$= \text{sen }\left(x^2\right)\Big|_0^1$$

$$= \text{sen}\, 1$$

■

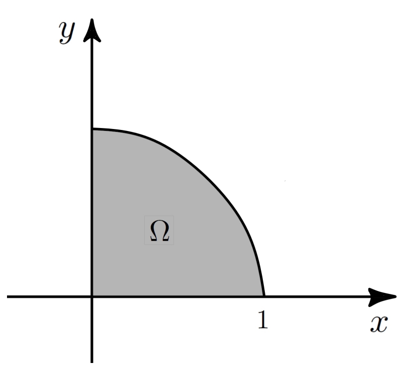
Exercício 2 *Desejamos calcular a integral*

$$A = \int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}dx\,dy$$

Cujo conjunto de integração é dado por

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le x \le \sqrt{1-y^2} \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

e esboçado pela seguinte figura



Usando coordenadas polares,

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = r$$

o conjunto Ω, neste referencial, torna-se

$$\Omega_1 : \begin{cases} 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$$

Assim, segue-se que

$$A = \iint_{\Omega_1} \sqrt{1-r^2}\,|J|\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\sqrt{1-r^2}d\theta\,dr$$

$$= \int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dr$$

$$= \int_0^1 \frac{\pi}{2} r\sqrt{1-r^2}dr$$

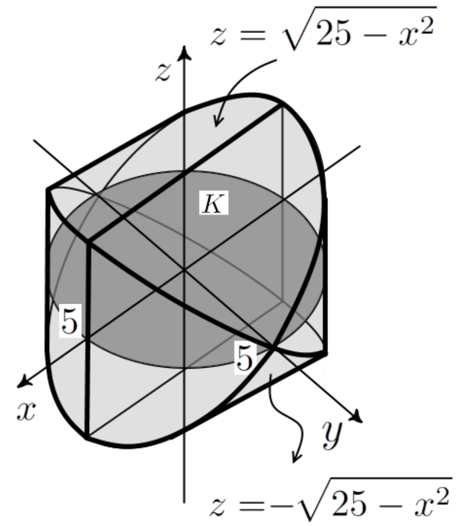
$$= -\frac{\pi}{4}\int_1^0 \sqrt{u}du$$

$$= -\frac{\pi}{4}\frac{2}{3}\sqrt{u^3}\Big|_1^0$$

$$= \frac{\pi}{6}$$

■

Exercício 3 *Observe que o sólido dado, possui o seguinte esboço*



Chamando de Ω *o conjunto que respresenta este sólido, podemos expressá-lo da seguinte maneira*

$$\Omega : \begin{cases} -\sqrt{25-x^2} \leq z \leq \sqrt{25-x^2} \\ (x,y) \in K \end{cases}$$

onde K *é o subconjunto do plano* xy *tal que* $x^2+y^2 \leq 5$*. Com isto, temos que,*

$$V = \iint_K \left[\sqrt{25-x^2} - \left(-\sqrt{25-x^2}\right)\right] dx\, dy$$

$$= 2\iint_K \sqrt{25-x^2} dx\, dy$$

O conjunto K*, por sua vez pode ser expresso como*

$$K : \begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ -\sqrt{25-x^2} \leq y \leq \sqrt{25-x^2} \end{cases}$$

Portanto,

$$V = 2\int_{-5}^{5}\int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} \sqrt{25-x^2} dy\, dx$$

$$= 2\int_{-5}^{5} \sqrt{25-x^2} y \,\Big|_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} dx$$

$$= 4\int_{-5}^{5} \sqrt{25-x^2}\sqrt{25-x^2} dx$$

$$= 4\int_{-5}^{5} \left(25-x^2\right) dx$$

$$= 4\left(25x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-5}^{5}$$

$$= \frac{2000}{3}$$

■

Exercício 4 *Usando coordenadas polares,*

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$|J| = r$$

O conjunto Ω*, neste referencial, torna-se*

$$\Omega_1 : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$$

Assim

$$\iint_\Omega e^{-\left(x^2+y^2\right)} dx\, dy = \iint_{\Omega_1} e^{-r^2} r d\theta\, dr$$

$$= \int_0^1\int_0^{2\pi} e^{-r^2} r d\theta\, dr$$

$$= \int_0^1 e^{-r^2} r\theta \,\Big|_0^{2\pi} dr$$

$$= 2\pi\int_0^1 e^{-r^2} r dr$$

$$= -\pi e^{-r^2}\Big|_0^1$$

$$= \pi\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

■

Exercício 5 *Chamando de* Ω *o conjunto que representa a lâmina em questão, segue-se que*

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

e a massa desta lâmina é dada por

$$M = \iint_\Omega \delta(x,y) dx\, dy$$

sendo δ *a densidade da mesma. De acordo com o enunciado do problema, temos que* $\delta(x,y)$ *é proporcional ao quadrado da distância de* (x,y) *à origem, ou seja*

$$\delta(x,y) = k\left(x^2+y^2\right),\ k \in \mathbb{R}$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
M &= \int_0^1 \int_0^1 k\left(x^2+y^2\right) dx\, dy \\
&= k\int_0^1 \left(\frac{x^3}{3}+y^2x\right)\Big|_0^1 dy \\
&= k\int_0^1 \left(\frac{1}{3}+y^2\right) dy \\
&= k\left(\frac{1}{3}y+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1 \\
&= \frac{2}{3}k
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III - Turma A3

Prof$^{\text{o}}$. Edson

2ª Prova **2º Semestre** **2015**

Data: 16 de Fevereiro de 2016 **Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Calcule a integral*

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} xz\,dzdxdy$$

Problema 2 *Calcule a integral*

$$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}}\int_{-\sqrt{9-x^2-y^2}}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dzdxdy$$

Problema 3 *Calcule*

$$\iiint_{\Omega} x^2 dV$$

onde Ω *é o tetraedro sólido com vértices* $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ *e* $(0,0,1)$.

Problema 4 *Um arame tem o formato do semi-círculo* $x^2+y^2=1$, $y\geq 0$. *Encontre o centro de massa desse arame se a sua densidade linear em qualquer ponto é proporcional à sua distância à reta* $y=1$.

Problema 5 *Calcule*

a). $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{1}{1+x}\,ds$, $\gamma(t)=t\mathbf{i}+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\mathbf{j}$, $0\leq t\leq 3$;

b). $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{e^{-z}}{x^2+y^2}\,ds$, $\gamma(t)=2\cos t\,\mathbf{i}+2\mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j}+t\mathbf{k}$, $0\leq t\leq 2\pi$.

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^{o}. Edson

2^{o} Semestre

Gabarito 2ª Prova **2015**
Data: Domingo, 9 de Setembro **Turma A3**

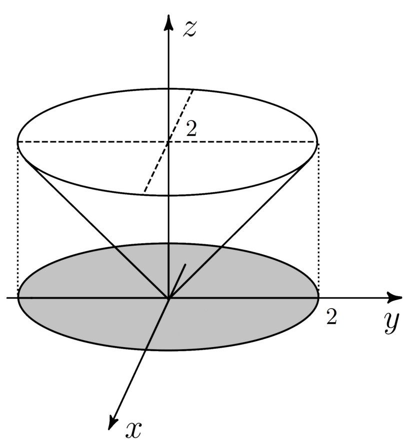
Exercício 1 *Desejamos calcular a integral*

$$A = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} xz\,dz\,dx\,dy$$

Para isto, observemos inicialmente que o domínio de integração desta integral é o conjunto

$$\Omega : \begin{cases} -2 \leq y \leq 2 \\ -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2} \\ \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2 \end{cases}$$

cujo desenho é esboçado na figura abaixo



Usando coordenadas cilindrícas,

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$|J| = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| = r$$

O conjunto Ω, neste referencial, torna-se,

$$\Omega_1 : \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ r \leq z \leq 2 \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2\int_0^{2\pi}\int_r^2 r\cos\theta\, z\,|J|\;dz\,d\theta\,dr \\ &= \int_0^2\int_0^{2\pi} r^2\cos\theta\,\frac{z^2}{2}\Big|_r^2\,d\theta\,dr \\ &= \int_0^2\int_0^{2\pi}\frac{r^2}{2}\cos\theta\left(4-r^2\right)d\theta\,dr \\ &= \int_0^2 -\frac{r^2}{2}\left(4-r^2\right)\mathrm{sen}\,\theta\Big|_0^{2\pi}\,dr \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

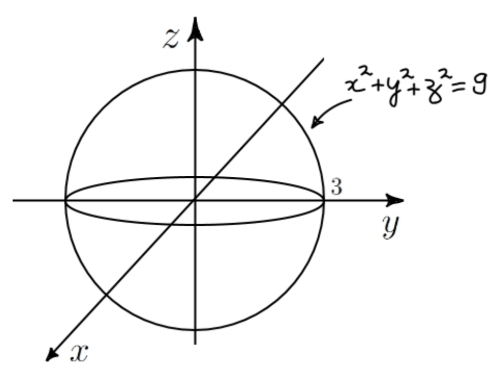
Exercício 2 *Desejamos agora, calcular a integral*

$$B = \int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}}\int_{-\sqrt{9-x^2-y^2}}^{\sqrt{9-x^2-y^2}}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz\,dx\,dy$$

Como fizemos no item anterior, observemos que o domínio de integração desta integral é o conjunto

$$\Omega : \begin{cases} -3 \leq y \leq 3 \\ -\sqrt{9-y^2} \leq x \leq \sqrt{9-y^2} \\ -\sqrt{9-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{9-x^2-y^2} \end{cases}$$

cujo desenho é esboçado na figura abaixo



Usando coordenadas esféricas,

$$\begin{cases} x = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$|J| = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi$$

O conjunto Ω, neste referencial, torna-se,

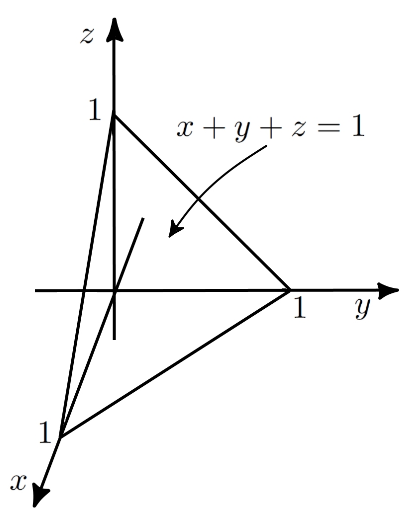
$$\Omega_1 : \begin{cases} 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \rho \le 3 \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} B &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{3} \rho\rho^2 \operatorname{sen}\varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi \\ &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\rho^4}{4}\operatorname{sen}\varphi \Big|_0^3 d\theta \, d\varphi \\ &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{81}{4}\operatorname{sen}\varphi \, d\theta \, d\varphi \\ &= \int_0^{\pi} \frac{81}{4}\operatorname{sen}\varphi \, \theta \Big|_0^{2\pi} d\varphi \\ &= 2\pi\frac{81}{4}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\varphi \, d\varphi \\ &= -\frac{81\pi}{2}\cos\varphi \Big|_0^{\pi} \\ &= -\frac{81\pi}{2}(-1-1) \\ &= 81\pi \end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Realizando um esboço do tetraedro em questão*



Assim, o conjunto Ω pode ser descrito como

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 - x \\ 0 \le z \le 1 - x - y \end{cases}$$

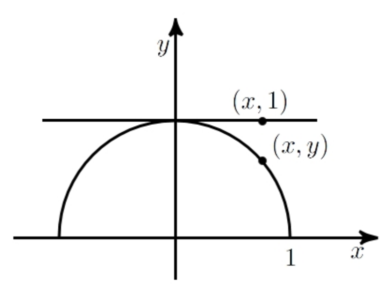
Portanto,

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} x^2 dV &= \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} x^2 dz \, dy \, dx \\ &= \int_0^1\int_0^{1-x} x^2 z \Big|_0^{1-x-y} dy \, dx \\ &= \int_0^1\int_0^{1-x} x^2(1-x-y) dy \, dx \\ &= \int_0^1 x^2\left(y - xy - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{1-x} dx \\ &= \int_0^1 x^2\left(1 - x - x(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2}\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^2 - 2x^3 + x^4\right) dx \\ &= \frac{1}{60} \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *De acordo com o enunciado deste problema a densidade linear do arame é dada por*

$$\delta(x,y) = k\,|y-1|\,,\; k \in \mathbb{R}$$



Como pode ser visto no esboço do gráfico que respresenta o arame, todos os pontos (x,y) do arame estão abaixo da reta $y = 1$. Portanto, para estes pontos $y \le 1$ e

$$\delta(x,y) = k(1-y),\; k \in \mathbb{R}$$

A massa deste arame é dada por

$$M = \int_{\gamma} \delta(x,y) ds$$

onde

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \operatorname{sen} t \end{cases} ; 0 \leq t \leq \pi$$

Portanto,

$$\begin{aligned} M &= \int_\gamma k\,(1-y)\,ds \\ &= k\int_0^\pi (1-\operatorname{sen} t)\,\|\gamma'(t)\|\,dt \\ &= k\int_0^\pi (1-\operatorname{sen} t)\,\sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}dt \\ &= k(\,t+\cos t)\Big|_0^\pi \\ &= k(\pi-1-0-1) \\ &= k(\pi-2) \end{aligned}$$

Além disto,

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{1}{M}\int_\gamma x\delta(x,y)ds \\ &= \frac{1}{k(\pi-2)}\int_0^\pi \cos t\cdot k(1-\operatorname{sen} t)\,\|\gamma'(t)\|\,dt \\ &= \frac{k}{k(\pi-2)}\int_0^\pi \cos t(1-\operatorname{sen} t)dt \\ &= \frac{1}{\pi-2}\int_0^\pi (\cos t - \cos t\operatorname{sen} t)dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y_c &= \frac{1}{M}\int_\gamma y\delta(x,y)ds \\ &= \frac{1}{k(\pi-2)}\int_0^\pi \operatorname{sen} t\cdot k(1-\operatorname{sen} t)\,\|\gamma'(t)\|\,dt \\ &= \frac{k}{k(\pi-2)}\int_0^\pi \operatorname{sen} t(1-\operatorname{sen} t)dt \\ &= \frac{4-\pi}{2\pi-4} \end{aligned}$$

■

Exercício 5

a). Sendo

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \dfrac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} \end{cases} ; 0 \leq t \leq 3$$

temos

$$\gamma'(t) = (1, \sqrt{t})$$

e

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+t}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{1}{1+x}ds &= \int_0^3 \frac{1}{1+t}\,\|\gamma'(t)\|\,dt \\ &= \int_0^3 \frac{\sqrt{1+t}}{1+t}dt \\ &= \int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{1+t}} \\ &= \int_1^4 \frac{du}{\sqrt{u}} \\ &= 2u^{\frac{1}{2}}\Big|_1^4 \\ &= 2\,(2-1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

□

b) Sendo

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = 2\operatorname{sen} t \\ z(t) = t \end{cases} ; 0 \leq t \leq 2\pi$$

temos

$$\gamma'(t) = (-2\operatorname{sen} t, 2\cos t, 1)$$

e

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{5}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{e^{-z}}{x^2+y^2}ds &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{-t}}{4}\,\|\gamma'(t)\|\,dt \\ &= \frac{\sqrt{5}}{4}\int_0^{2\pi} e^{-t}dt \\ &= -\frac{\sqrt{5}}{4}e^{-t}\Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{4}\left(1-e^{-2\pi}\right) \end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III - Turma A3

Prof$^{\text{o}}$. Edson

3ª Prova **2º Semestre** **2015**

Data: 22 de Março de 2016 **Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Calcule o trabalho realizado pelo campo vetorial*

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2+y)\mathbf{i} + (y^2+x)\mathbf{j} + ze^z\mathbf{k}$$

ao deslocar uma partícula sobre a curva formado pelo eixo x*, do ponto* $(1,0,0)$ *ao ponto* $(0,0,0)$ *seguido pela parábola* $z = x^2$ *no plano* $y = 0$*, do ponto* $(0,0,0)$ *ao ponto* $(1,0,1)$*.*

Problema 2 *Calcule as integrais*

a). $\oint_\gamma (6y+x)dx+(y+2x)dy$*, sendo* γ *a curva cujo traço possui equação* $(x-2)^2+(y-3)^2 = 4$

b). $\oint_\gamma 3ydx + 2xdy$ *onde a curva* γ *é a fronteira do conjunto* $0 \leq x \leq \pi$*,* $0 \leq y \leq \operatorname{sen} x$*.*

Problema 3 *Calcule a área da porção do cone* $z = \sqrt{x^2+y^2}$ *que está sobre a região do plano* xy *entre as curvas* $x^2+y^2 = 1$ *e* $9x^2+4y^2 = 36$*.*

Problema 4 *Calcule o fluxo do campo vetorial*

$$\mathbf{F}(x,y,z) = 2xz\mathbf{i} - xy\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$$

através da fronteira do sólido que está no primeiro octante limitado pelo plano $y+z = 4$ *e pelo cilindro elíptico* $4x^2+y^2 = 16$*.*

Problema 5 *Calcule*

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\gamma$$

sendo $\mathbf{F}(x,y,z) = (y-x)\mathbf{i} + (x-z)\mathbf{j} + (x-y)\mathbf{k}$ *e* γ *é a fronteira do triângulo de vértices* $(2,0,0)$*,* $(0,2,0)$ *e* $(0,0,1)$*.*

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^{o}. Edson

2^{o} Semestre

Gabarito 3^{a} Prova **2015**
Data: Segunda-feira, 28 de Março **Turma A3**

Exercício 1 *Inicialmente observemos que*

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}(x,y,z)=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x^2+y & y^2+x & ze^z\end{vmatrix}=\mathbf{0}$$

Assim, como $D_{\mathbf{F}}=\mathbb{R}^3$, que é simplesmente conexo, e $\operatorname{rot}\mathbf{F}(x,y,z)=\mathbf{0}$, segue-se que $\mathbf{F}$ é um campo vetorial conservativo. Podemos portanto, escolher qualquer caminho que preserve os pontos inicial e final do caminho dado no problema.

Conforme o enunciado, o ponto inicial é o ponto $A=(1,0,0)$ e o ponto final é o ponto $B=(1,0,1)$. O segmento de reta que começa em A e termina em B, pode ser parametrizado da seguinte forma

$$\gamma:\begin{cases}x(t)=1\\ y(t)=0 \quad ; 0\le t\le 1\\ z(t)=t\end{cases}$$

Assim, o trabalho que se deseja calcular é dado por

$$\begin{aligned}\tau&=\int_\gamma \mathbf{F}d\gamma\\ &=\int_0^1 \mathbf{F}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt\\ &=\int_0^1 \mathbf{F}(1,0,t)\cdot(0,0,1)dt\\ &=\int_0^1 (1,1,te^t)\cdot(0,0,1)dt\\ &=\int_0^1 te^t dt\\ &=e^t(t-1)\Big|_0^1\\ &=0-(-1)\\ &=1\end{aligned}$$

■

Exercício 2

a). *Considere*

$$A=\oint_\gamma (6y+x)dx+(y+2x)dy$$

Como o caminho sobre o qual deseja-se calcular a integral trata-se de uma curva fechada e o campo vetorial dado por

$$\mathbf{F}(x,y)=(6y+x)\mathbf{i}+(y+2x)\mathbf{j}$$

está definido para todos os (x,y) no interior da curva dada, segue-se do ***Teorema de Green*** *que*

$$\begin{aligned}A&=\iint_{\mathring{\gamma}}\left[\frac{\partial}{\partial x}(y+2x)-\frac{\partial}{\partial y}(6y+x)\right]dx\,dy\\ &=\iint_{\mathring{\gamma}}(2-6)\,dx\,dy\\ &=-4\iint_{\mathring{\gamma}}dx\,dy\\ &=-4\,\text{Área}(\mathring{\gamma})\end{aligned}$$

Sendo $\mathring{\gamma}$ o interior da curva γ. Observe que, sendo γ a curva cujo traço esta sobre a equação

$$(x-2)^2+(y-3)^2=4$$

é, na verdade uma circunferência de raio 2 e centro no ponto $(2,3)$. Assim

$$\text{Área}(\mathring{\gamma})=\pi(2)^2=4\pi$$

e disto segue-se que

$$A=-4\,\text{Área}(\mathring{\gamma})=-16\pi$$

□

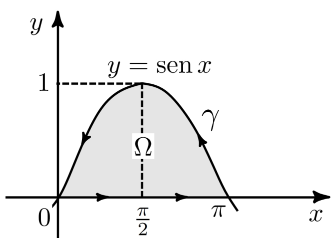
b). *Considere agora*

$$B=\oint_\gamma 3ydx+2xdy$$

*Usando novamente o **Teorema de Green**, temos que*

$$
\begin{aligned}
B &= \iint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}(2x) - \frac{\partial}{\partial y}(3y)\right] dx\,dy \\
&= \iint_\Omega (2-3) dx\,dy \\
&= -\iint_\Omega dx\,dy \\
&= -\text{Área}(\Omega)
\end{aligned}
$$

Onde Ω é o interior da curva γ. Observe que um esboço possível para esta curva pode ser dado pela figura abaixo



Assim,

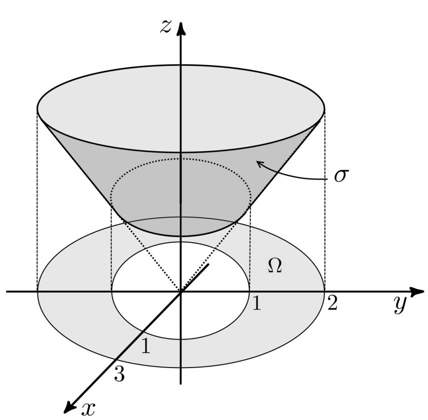
$$
\begin{aligned}
\text{Área}(\Omega) &= \int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx \\
&= -\cos x \Big|_0^\pi \\
&= -\cos\pi + \cos 0 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

Logo,

$$B = -\text{Área}(\Omega) = -2$$

■

Exercício 3 *Realizando um esboço da porção de superfície em questão*



Uma parametrização possível para esta superfície é dada por

$$
\sigma : \begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = v \\ z(u,v) = \sqrt{u^2+v^2} \end{cases}, \ (u,v) \in \Omega
$$

Donde segue-se que,

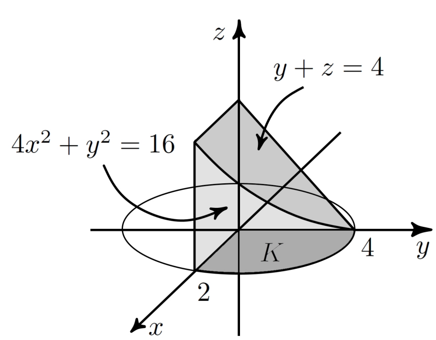
$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\sigma}{\partial u} &= \left(1, 0, \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\right) \\
\frac{\partial\sigma}{\partial v} &= \left(0, 1, \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\right) \\
\frac{\partial\sigma}{\partial u} \times \frac{\partial\sigma}{\partial v} &= \left(\frac{-u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \frac{-v}{\sqrt{u^2+v^2}}, 1\right) \\
\left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u} \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}\right\| &= \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

e a área procurada é dado por

$$
\begin{aligned}
A &= \iint_\sigma 1 ds \\
&= \iint_\Omega \left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u} \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}\right\| du\,dv \\
&= \iint_\Omega \sqrt{2} du\,dv \\
&= \sqrt{2}\iint_\Omega du\,dv \\
&= \sqrt{2}\,\text{Área}(\Omega) \\
&= \sqrt{2}\left(\text{Área}(\textit{elipse}) - \text{Área}(\textit{círculo})\right) \\
&= \sqrt{2}\left(\pi\cdot 2\cdot 3 - \pi\cdot 1^2\right) \\
&= 5\sqrt{2}\pi
\end{aligned}
$$

■

Exercício 4 *Realizando um esboço do sólido em questão, o qual denominaremos de Ω, obtemos a seguinte figura*



Usando o ***Teorema da Divergência de Gauss****, teremos*

$$\iint_\sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds = \iiint_\Omega \operatorname{div}\mathbf{F}dx\,dy\,dz$$
$$= \iiint_\Omega (2z - x - 2z)\,dx\,dy\,dz$$
$$= \iiint_\Omega -xdx\,dy\,dz$$

Sendo

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le z \le 4 - y \\ (x,y) \in K \end{cases}$$

Ou seja,

$$\iint_\sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds = \iint_K\int_0^{4-y} -xdz\,dx\,dy$$
$$= \iint_K -xz\Big|_0^{4-y} dx\,dy$$
$$= \iint_K -x\,(4-y)\,dx\,dy$$

Usando as coordenadas

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$|J| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \frac{1}{2}r$$

O conjunto K, neste referencial, torna-se

$$K_2 : \begin{cases} 0 \le r \le 4 \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

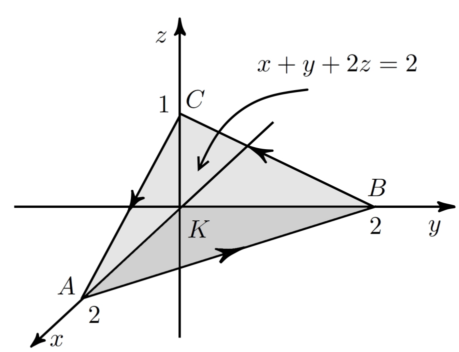
Portanto,

$$\iint_\sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds = \iint_K -x\,(4-y)\,dx\,dy$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^4 -\frac{1}{2}r\cos\theta\,(4 - r\operatorname{sen}\theta)\,|J|\,dr\,d\theta$$
$$= -\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^4 \left(4r^2\cos\theta - r^3\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right)dr\,d\theta$$
$$= -\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4}{3}r^3\cos\theta - \frac{1}{4}r^4\operatorname{sen}\theta\cos\theta\Big|_0^4 d\theta$$
$$= -\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{256}{3}\cos\theta - \frac{256}{4}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right)d\theta$$
$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{256}{3}\operatorname{sen}\theta - \frac{256}{4}\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= -\frac{40}{3}$$

■

Exercício 5 *Inicialmente necessitamos descobrir a equação do plano que contém o triângulo de vértices $A = (2,0,0)$, $B = (0,2,0)$ e $C = (0,0,1)$. Para isto, observe que o vetor normal deste plano é dado por*

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= (B - A)\times(C - A)\\ &= (-2,2,0)\times(0,-2,1)\\ &= (2,2,4)\end{aligned}$$



O plano que passa pelo ponto A e possui $\mathbf{n}$ como vetor normal é dado por

$$[(x,y,z) - A]\cdot\mathbf{n} = 0 \Leftrightarrow$$
$$[(x,y,z) - (2,0,0)]\cdot(2,2,4) = 0 \Leftrightarrow$$
$$x + y + 2z = 2$$

Uma parametrização possível para a porção deste plano delimitadapelos vértices A,B e C, pode ser dada *por*

$$\sigma : \begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = v \\ z(u,v) = \dfrac{2-u-v}{2} \end{cases} ; \ (u,v) \in K$$

Donde segue-se que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = \left(1, 0, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v} = \left(0, 1, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

Observe agora que

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{F}(x,y,z) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-x & x-z & x-y \end{vmatrix} \\ &= (0,-1,0) \end{aligned}$$

*E usando o **Teorema de Stokes**, teremos que*

$$\begin{aligned} \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\gamma &= \iint_\sigma \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds \\ &= \iint_K (0,-1,0) \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)}{\left\| \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) \right\|} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) du \, dv \\ &= -\frac{1}{2} \iint_K du \, dv \\ &= -\frac{1}{2} \text{Área}(K) \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 2}{2} \\ &= -1 \end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III - Turma A3

Prof$^{\text{o}}$. Edson

Prova Final **2$^{\text{o}}$ Semestre** **2015**

Data: 31 de Março de 2016 **Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Uma lâmina ocupa a parte do disco $x^2 + y^2 \leq 1$ que encontra-se no primeiro quadrante. Determine o centro de massa sendo a densidade em qualquer ponto da lâmina, proporcional à distância do ponto ao eixo x.*

Problema 2 *Calcule o volume do sólido limitado pela superfície $y = x^2$ e pelos planos $z = 0$ e $y + z = 1$.*

Problema 3 *Calcule*

$$\int_\gamma (1 - ye^{-x})dx + e^{-x}dy$$

onde γ é o trecho da curva $y = \sqrt{x} + 1$, do ponto $(0, 1)$ ao ponto $(1, 2)$.

Problema 4 *Calcule o fluxo do campo vetorial*

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

através da fronteira do sólido delimitado pelo cilindro $x^2 + z^2 = 1$ e pelos planos $y = 0$ e $x + y = 2$.

Problema 5 *Calcule*

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\gamma$$

sendo $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + (x + yz)\mathbf{j} + (xy - \sqrt{z})\mathbf{k}$ e γ é a fronteira da região do plano $3x + 2y + z = 1$ que está no primeiro octante.

Boa Sorte!

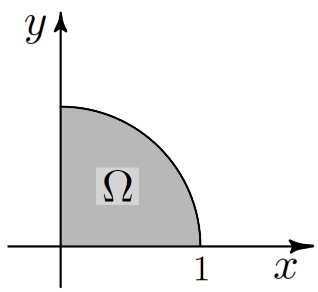
Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Profº. Edson

2º Semestre

Gabarito Prova Final **2015**
Data: Segunda-feira, 4 de Abril **Turma A3**

Exercício 1 *Realizando um esboço da lâmina dada em questão, obtemos a seguinte figura*



Sabendo que sua densidade em qualquer ponto é proporcional à distância deste ponto ao eixo x, ou seja

$$\delta(x,y) = ky,\ k \in \mathbb{R}$$

Segue-se que a massa desta lâmina é dada por

$$\begin{aligned} M &= \iint_{\Omega} \delta(x,y) dx\, dy \\ &= k \iint_{\Omega} y\, dx\, dy \end{aligned}$$

Usando coordenadas polares,

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$|J| = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right| = r$$

O conjunto Ω*, neste referencial, torna-se*

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} M &= k \iint_{\Omega} y\, dx\, dy \\ &= k \iint_{\Omega_1} r \operatorname{sen}\theta\ |J|\, dr\, d\theta \\ &= k \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, dr \\ &= k \int_0^1 -r^2 \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dr \\ &= k \int_0^1 r^2 dr \\ &= k\ \frac{r^3}{3} \Big|_0^1 \\ &= \frac{k}{3} \end{aligned}$$

Além disto, seu centro de massa será o ponto (x_c, y_c) *onde*

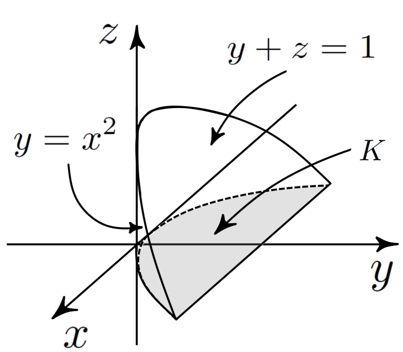
$$\begin{aligned} x_c &= \frac{1}{M} \iint_{\Omega} x\, \delta(x,y)\, dx\, dy \\ &= \frac{3}{k} \iint_{\Omega_1} r\cos\theta\, k\, r \operatorname{sen}\theta\ |J|\, dr\, d\theta \\ &= 3 \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \cos\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, dr \\ &= 3 \int_0^1 r^3 \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dr \\ &= \frac{3}{2} \int_0^1 r^3 dr \\ &= \frac{3}{2}\ \frac{r^4}{4} \Big|_0^1 \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
y_c &= \frac{1}{M}\iint_{\Omega} y\,\delta(x,y)\,dx\,dy \\
&= \frac{3}{k}\iint_{\Omega_1} r\,\mathrm{sen}\,\theta\,k\,r\,\mathrm{sen}\,\theta\;|J|\,dr\,d\theta \\
&= 3\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3\mathrm{sen}^2\theta\,d\theta\,dr \\
&= 3\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta\,dr \\
&= \frac{3}{2}\int_0^1 r^3\left(\theta-\frac{\mathrm{sen}\,2\theta}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}dr \\
&= \frac{3\pi}{4}\int_0^1 r^3dr \\
&= \frac{3\pi}{4}\,\frac{r^4}{4}\Big|_0^1 \\
&= \frac{3\pi}{16}
\end{aligned}
$$

■

Exercício 2 *Realizando um esboço do sólido em questão, o qual denominaremos de Ω, obtemos a seguinte figura*



O volume de Ω é dado pela seguinte integral

$$V=\iint_K (1-y)dx\,dy$$

sendo

$$K:\begin{cases}-1\le x\le 1\\ x^2\le y\le 1\end{cases}$$

Ou seja

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-1}^1\int_{x^2}^1(1-y)dy\,dx \\
&= \int_{-1}^1\left(y-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{x^2}^1 dx \\
&= \int_{-1}^1\left(\frac{1}{2}-x^2+\frac{x^4}{2}\right)dx \\
&= \left(\frac{x}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}\right)\Big|_{-1}^1 \\
&= \frac{8}{15}
\end{aligned}
$$

■

Exercício 3 *Observe inicialmente que deseja-se calcular uma integral de linha do campo vetorial*

$$\mathbf{F}(x,y)=\left(1-ye^{-x}\right)\mathbf{i}+e^{-x}\mathbf{j}$$

e que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rot}\,\mathbf{F}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(1-ye^{-x}\right) \\
&= -e^{-x}+e^{-x} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Logo, como $D_{\mathbf{F}}=\mathbb{R}^2$, que é simplesmente conexo, a integral em questão é independente do caminho escolhido, importando apenas os pontos de início e fim do caminho, que neste caso são

$$A=(0,1)\;e\,B=(1,2)$$

Escolhendo o segmento de reta que que começa em A e termina em B, cuja parametrização é dada or

$$\gamma_1:\begin{cases}x(t)=t\\ y(t)=1+t\end{cases}\quad 0\le t\le 1$$

e considerando

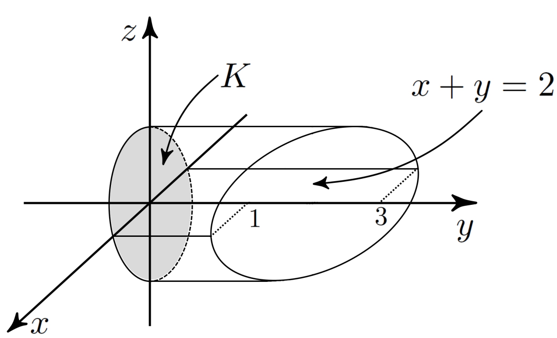
$$I=\int_\gamma\left(1-ye^{-x}\right)dx+e^{-x}dy$$

Temos que

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{\gamma_1} \left(1 - ye^{-x}\right) dx + e^{-x} dy \\
&= \int_0^1 \left[1 - (1+t)e^{-t}\right] dt + e^{-t} dt \\
&= \int_0^1 \left(1 - e^{-t} - te^{-t} + e^{-t}\right) dt \\
&= \int_0^1 \left(1 - te^{-t}\right) dt \\
&= \left[t + e^{-t}(t+1)\right] \Big|_0^1 \\
&= \frac{2}{e}
\end{aligned}
$$

■

Exercício 4 *Realizando um esboço do sólido dado em questão, o qual chamaremso de Ω, obtemos a seguinte figura*



O fluxo de $\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ *através da superfície* σ *que corresponde à fronteira deste sólido é dado por*

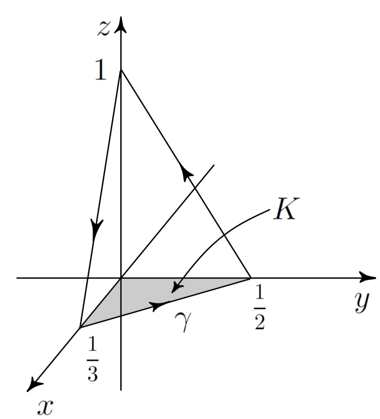
$$\iint_\sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds$$

sendo $\mathbf{n}$ *o vetor normal externo à superfície. Entretanto, por tratar-se de uma superfície fechada, o* ***Teorema da Divergência de Gauss****, nos garante que*

$$
\begin{aligned}
\iint_\sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds &= \iiint_\Omega \operatorname{div} \mathbf{F}\, dx\, dy\, dz \\
&= \iiint_\Omega 2\, dx\, dy\, dz \\
&= 2 \iiint_\Omega dx\, dy\, dz \\
&= 2 \operatorname{Vol}(\Omega) \\
&= 4\pi
\end{aligned}
$$

■

Exercício 5 *Desenhando a região em questão teremos a seguinte figura*



Como trata-se de uma curva fechada, o ***Teorema de Stokes*** *nos garante que*

$$\int_\gamma F \cdot d\gamma = \iint_\sigma \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds$$

onde

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot} \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 1 & x + yz & xy - \sqrt{z} \end{vmatrix} \\
&= (x - y)\mathbf{i} - y\mathbf{j} + \mathbf{k}
\end{aligned}
$$

e uma possível parametrização para a superfície σ *é dada por*

$$\sigma : \begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = v \\ z(u,v) = 1 - 3u - 2v \end{cases} \qquad (u,v) \in K$$

com

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u} = (1, 0, -3)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial v} = (0, 1, -2)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u} \times \frac{\partial\sigma}{\partial v} = (3, 2, 1)$$

Portanto

$$\int_\gamma F \cdot d\gamma = \iint_\sigma (u - v, -v, 1) \cdot \frac{(3, 2, 1)}{\|(3, 2, 1)\|}\, ds$$

$$= \iint_K (3u - 3v - 2v + 1)\, du\, dv$$

Observe que

$$K : \begin{cases} 0 \leq u \leq \frac{1}{3} \\ 0 \leq v \leq \frac{1-3u}{2} \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \int_\gamma F \cdot d\gamma &= \int_0^{\frac{1}{3}} \int_0^{\frac{1-3u}{2}} (3u - 5v + 1)\, dv\, du \\ &= \int_0^{\frac{1}{3}} \left(3uv - \frac{5}{2}v^2 + v\right) \Big|_0^{\frac{1-3u}{2}} du \\ &= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{1}{3}} \left(-81u^2 + 30u - 1\right) du \\ &= \frac{1}{8} \left(-27u^3 + 15u^2 - u\right) \Big|_0^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{24} \end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III - Turma M3

Prof^o. Edson

1ª Prova | **1º Semestre** | **2016**

Data: 07 de Junho | **Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Calcule as integrais:*

a). $\displaystyle\int_0^2 \int_x^2 2y^2 \text{sen}\,(xy)\, dy\, dx;$

b). $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y} dy\, dx.$

Problema 2 *Calcule a integral*

$$\iint_\Omega \frac{y-4x}{y+4x} dx\, dy$$

onde Ω *é a região delimitada pelas retas* $y = 4x$, $y = 4x + 2$, $y = 2 - 4x$ *e* $y = 5 - 4x$.

Problema 3 *Calcule o volume da região no primeiro octante limitada pela superfície*

$$z = 9 - x^2 - 3y^2$$

Problema 4 *Calcule a área da região do plano limitada pelas curvas* $y^2 = -x$ *e* $3y - x = 4$.

Problema 5 *Encontre a massa da lâmina plana delimitada pelo triângulo cujos lados são segmentos dos eixos coordenados e a reta* $3x + 2y = 18$ *e cuja densidade no ponto* (x, y) *é proporcional ao produto das distâncias deste ponto aos eixos coordenados.*

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Profº. Edson

1º Semestre

Gabarito 1ª Prova **2016**
Data: Quarta-feira, 8 de Março **Turma M3**

Exercício 1

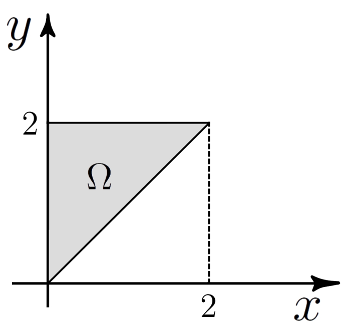
a). *Desejamos calcular a integral*

$$\int_0^2 \int_x^2 2y^2 \text{sen}\,(xy)\, dy\, dx$$

Observe inicialmente que o domínio de integração desta integral é dado por

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ x \le y \le 2 \end{cases}$$

Realizando um esboço deste conjunto, obtemos a seguinte figura



Observe, no entanto que, o conjunto Ω também pode ser expresso como

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le x \le y \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_0^2\int_x^2 2y^2 \text{sen}\,(xy)\, dy\, dx &= \int_0^2\int_0^y 2y^2 \text{sen}\,(xy)\, dx\, dy \\ &= \int_0^2 -2y^2 \frac{\cos(xy)}{y} \Big|_0^y dy \\ &= \int_0^2 \left(2y - 2y\cos\, y^2\right) dy \\ &= \left(y^2 - \text{sen}\, y^2\right) \Big|_0^2 \\ &= 4 - \text{sen}\, 4 \end{aligned}$$

□

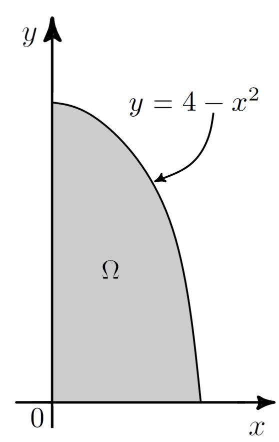
b). *Desejamos agora calcular a integral*

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y} dy\, dx$$

Observe que o domínio de integração, neste caso é o conjunto

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 4 - x^2 \end{cases}$$

Cujo esboço é dado pela seguinte figura



Observe que o conjunto Ω pode também ser descrito como

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le x \le \sqrt{4-y} \\ 0 \le y \le 4 \end{cases}$$

Ou seja

$$\int_0^2\int_0^{4-x^2}\frac{xe^{2y}}{4-y}dy\,dx = \int_0^4\int_0^{\sqrt{4-y}}\frac{xe^{2y}}{4-y}dx\,dy$$

$$= \int_0^4 \frac{x^2e^{2y}}{2(4-y)}\Bigg|_0^{\sqrt{4-y}} dy$$

$$= \int_0^4 \frac{(4-y)e^{2y}}{2(4-y)}dx$$

$$= \int_0^4 \frac{e^{2y}}{2}dx$$

$$= \frac{e^{2y}}{4}\Bigg|_0^4$$

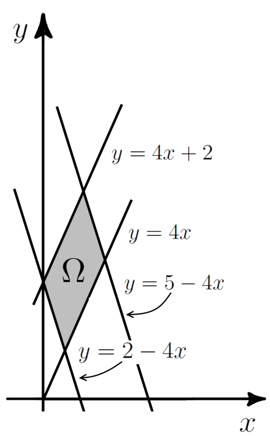
$$= \frac{e^8-1}{4}$$

■

Exercício 2 *Para calcularmos a integral*

$$A = \iint\limits_{\Omega}\frac{y-4x}{y+4x}dx\,dy$$

onde Ω *é a região delimitada pelas retas* $y = 4x$, $y = 4x+2$, $y = 2-4x$ *e* $y = 5-2x$, *devemos inicialmente traçar um esboço desta região. Teremos com isto, a seguinte figura*



Considere a seguinte mudança de variáveis

$$\varphi^{-1} : \begin{cases} u = y-4x \\ v = y+4x \end{cases}$$

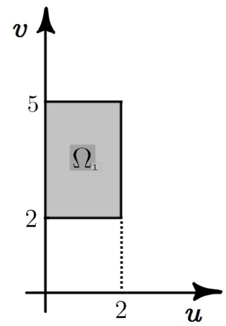
Segue-se disto que

$$\varphi : \begin{cases} x = \dfrac{-u+v}{8} \\ y = \dfrac{u+v}{2} \end{cases}$$

e, o jacobiano desta transformação será, portanto

$$|J| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{8}$$

e o conjunto Ω *neste referencial torna-se*



$$\Omega_1 : \begin{cases} 0 \le u \le 2 \\ 2 \le v \le 5 \end{cases}$$

Assim, segue-se que

$$A = \iint\limits_{\Omega_1}\frac{u}{v}\,|J|\,du\,dv$$

$$= \int_2^5\int_0^2 \frac{u}{8v}du\,dv$$

$$= \int_2^5 \frac{u^2}{16v}\Bigg|_0^2 dv$$

$$= \int_2^5 \frac{dv}{4v}$$

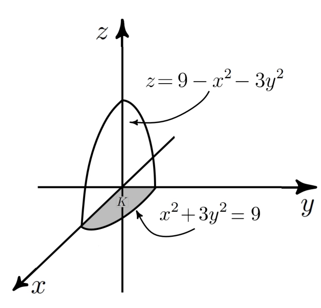
$$= \frac{\ln v}{4}\Bigg|_2^5$$

$$= \frac{\ln 5 - \ln 2}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{5}{2}$$

■

Exercício 3 *Traçando um esboço do sólido em questão, obtemos a seguinte figura*



Assim, o volume deste sólido é dado por

$$V = \iint\limits_{K} \left(9 - x^2 - 3y^2\right) dx\, dy$$

sendo

$$K = \left\{(x,y) \,/ x^2 + 3y^2 \leq 9,\ x \geq 0, y \geq 0 \right\}$$

Considere a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = \dfrac{r}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \frac{r}{\sqrt{3}}$$

Neste referencial, o conjunto K torna-se

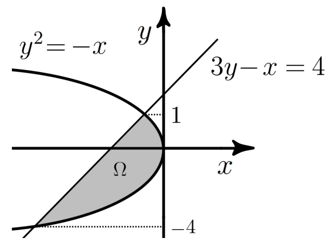
$$K_1 : \begin{cases} 0 \leq r \leq 3 \\ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} V &= \iint\limits_{K_1} \left(9 - r^2\right)|J|\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^3 \left(9 - r^2\right)\frac{r}{\sqrt{3}} dr\, d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^3 \left(9r - r^3\right) dr\, d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{9}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4\right)\Bigg|_0^3 d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{81}{4} d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{81}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\ &= \frac{81}{4\sqrt{3}}\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{81\pi}{8\sqrt{3}} \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Realizando um esboço da região dada no problema, obtemos a seguinte figura*



Observe que esta região, a qual denominaremos Ω, pode ser espressa como:

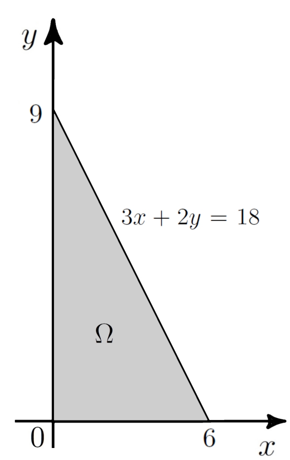
$$\Omega : \begin{cases} 3y - 4 \leq x \leq -y^2 \\ -4 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

Assim

$$\begin{aligned} A(\Omega) &= \iint_{\Omega} 1 dx\, dy \\ &= \int_{-4}^{1}\int_{3y-4}^{-y^2} dx\, dy \\ &= \int_{-4}^{1} x\,\Bigg|_{3y-4}^{-y^2} dy \\ &= \int_{-4}^{1} \left(-y^2 - 3y + 4\right) dy \\ &= \left(-\frac{1}{3}y^3 - \frac{3}{2}y^2 + 4y\right)\Bigg|_{-4}^{1} \\ &= \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 4\right) - \left(\frac{64}{3} - 24 - 16\right) \\ &= \frac{125}{6} \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *A lâmina dada possui o seguinte formato*



Chamando de Ω *o conjunto que representa esta lâmina, segue-se que*

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 6 \\ 0 \leq y \leq \dfrac{18-3x}{2} \end{cases}$$

e a massa desta lâmina é dada por

$$M = \iint_{\Omega} \delta(x,y) dx\, dy$$

sendo δ *a densidade da mesma. De acordo com o enunciado do problema,* $\delta(x,y)$ *é proporcional ao produto das distâncias de* (x,y) *aos eixos coordenados, ou seja*

$$\delta(x,y) = kxy, \;\; k \in \mathbb{R}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
M &= \int_0^6 \int_0^{\frac{18-3x}{2}} kxy\, dy\, dx \\
&= k \int_0^6 \frac{xy^2}{2} \Big|_0^{\frac{18-3x}{2}} dx \\
&= k \int_0^6 2\,\frac{324x - 108x^2 + 9x^3}{8} dx \\
&= \frac{k}{8} \int_0^6 2 \left(324x - 108x^2 + 9x^3\right) dx \\
&= \frac{k}{8} \left(162x^2 - 36x^3 + \frac{9}{4}x^4\right) \Big|_0^6 \\
&= \frac{k}{8} \left(5832 - 7776 + 2916\right) \\
&= \frac{243k}{2}
\end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III - Turma M3

Prof^{o}. Edson

2ª Prova **1º Semestre** **2016**

Data: 28 de Julho **Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Calcule as integrais:*

a). $\displaystyle\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{2x+y} dz\, dx\, dy;$

b). $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{4-x^2-y} xdz\, dy\, dx.$

Problema 2 *Calcule o volume da região no primeiro octante limitada pelos planos coordenados, pelo plano* $y+z=2$ *e pelo cilindro* $x=4-y^2$.

Problema 3 *Determine o momento de inércia do hemisfério sólido homogêneo* $x^2+y^2+z^2 \leq 1$, $z \geq 0$ *em relação ao eixo* z.

Problema 4 *Calcule* $\displaystyle\int_\gamma 2ydx + zdy + xdz$ *onde* γ *é a interseção das superfícies* $x^2+4y^2=1$ *e* $x^2+z^2=1$, $y \geq 0$ *e* $z \geq 0$, *sendo o sentido de percurso do ponto* $(1,0,0)$ *para o ponto* $(-1,0,0)$.

Problema 5 *Calcule* $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\gamma$, *sendo*

a). $\mathbf{F}(x,y) = (y^2-x^2)\mathbf{i} + (x^2+y^2)\mathbf{j}$ *e* γ *é o triângulo limitado por* $y=0$, $x=3$ *e* $y=x$ *no sentido anti-horário;*

b). $\mathbf{F}(x,y) = 2xy^3\mathbf{i} + 4x^2y^2\mathbf{j}$ *sendo* C *a fronteira da região no primeiro quadrante limitada pelo eixo* x, *pela reta* $x=1$ *e pela curva* $y=x^3$.

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof$^{\text{o}}$. Edson

1$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito 2$^{\text{a}}$ Prova **2016**
Data: Domingo, 7 de Agosto **Turma M3**

Exercício 1

a). *Desejamos calcular a integral*

$$A = \int_0^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{2x+y} dz\, dx\, dy$$

Observe inicialmente que a integral dada por A pode ser reescrita da seguinte maneira

$$A = \iint_K \int_0^{2x+y} dz\, dx\, dy$$

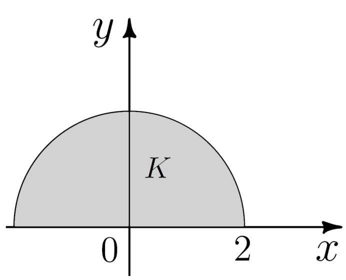
sendo

$$K : \begin{cases} 0 \leq y \leq 2 \\ -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2} \end{cases}$$

Ou seja

$$A = \iint_K (2x+y) dx\, dy$$

Realizando um esboço deste conjunto, obtemos a seguinte figura



e usando coordenadas polares, ou seja

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \end{cases},$$

cujo jacobiano é

$$|J| = \left\| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} \right\| = r,$$

o conjunto K, neste referencial, torna-se

$$K_2 : \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

Assim, a integral A, pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} A &= \iint_{K_2} |J|\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^\pi \int_0^2 r\,(2r\cos\theta + r\operatorname{sen}\theta)\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^\pi \int_0^2 (2\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\, r^2 dr\, d\theta \\ &= \int_0^\pi (2\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\, \frac{r^3}{3}\Big|_0^2 d\theta \\ &= \frac{8}{3}\int_0^\pi (2\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\, d\theta \\ &= \frac{8}{3}\,(2\operatorname{sen}\theta - \cos\theta)\Big|_0^\pi \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

□

b). *Desejamos agora calcular a integral*

$$B = \int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{4-x^2-y} x\, dz\, dy\, dx$$

Observe que

$$\begin{aligned} B &= \int_0^1 \int_0^{1-x^2} xz\Big|_0^{4-x^2-y} dy\, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x^2} x\left(4 - x^2 - y\right) dy\, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x^2} \left(4x - x^3 - xy\right) dy\, dx \\ &= \int_0^1 \left(4xy - x^3 y - \frac{1}{2}xy^2\right)\Big|_0^{1-x^2} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^5 - 4x^3 + \frac{7}{2}x\right) dx \end{aligned}$$

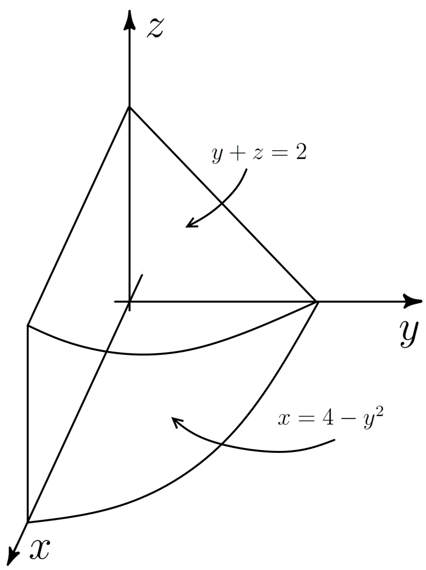
$$= \left(\frac{1}{12}x^6 - x^4 + \frac{7}{4}x^2 \right) \Bigg|_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{12} - 1 + \frac{7}{4} \right)$$

$$= \frac{5}{6}$$

■

Exercício 2 *Inicialmente precisamos realizar um esboço do sólido em questão, donde segue-se a seguinte figura*



Chamando de Ω *o conjunto que representa este sólido, observando a figura temos que sua descrição pode ser dada por*

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 - y^2 \\ 0 \leq y \leq 2 \\ 0 \leq z \leq 2 - y \end{cases}$$

Portanto, o volume procurado é dado pela seguinte integral

$$V = \int_0^2 \int_0^{2-y} \int_0^{4-y^2} 1 dx\, dz\, dy$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2-y} x \Bigg|_0^{4-y^2} dz\, dy$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2-y} \left(4 - y^2\right) dz\, dy$$

$$= \int_0^2 \left(4 - y^2\right) z \Bigg|_0^{2-y} dy$$

$$= \int_0^2 \left(4 - y^2\right) (2 - y)\, dy$$

$$= \int_0^2 \left(y^3 - 2y^2 - 4y + 8\right) dy$$

$$= \left(\frac{1}{4}y^4 - \frac{2}{3}y^3 - 2y^2 + 8y \right) \Bigg|_0^2$$

$$= \frac{20}{3}$$

■

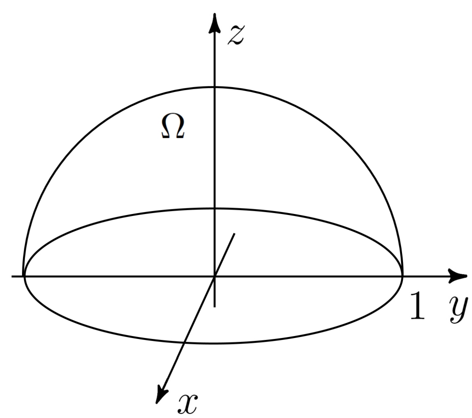
Exercício 3 *A distância de um ponto* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *qualquer ao eixo* z *é dada por*

$$d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

E do enunciado tem-se que a densidade do sólido é homogênea, ou seja

$$\delta(x, y, z) = k,\ k \in \mathbb{R}$$

Traçando um esboço do sólido em questão, obtemos a seguinte figura



Assim, o momento de inércia deste sólido em relação ao eixo z *é dado pela seguinte integral*

$$I = \iiint_\Omega \delta(x, y, z) d^2(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \iiint_\Omega k \left(x^2 + y^2\right) dx\, dy\, dz$$

$$= k \iiint_\Omega \left(x^2 + y^2\right) dx\, dy\, dz$$

Usando coordenadas esférica, ou seja

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \left\| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} \right\| = \rho^2 \operatorname{sen} \varphi$$

Neste referencial, o conjunto Ω *torna-se*

$$\Omega_1 : \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Com isto, segue-se que

$$\begin{aligned} I &= k \iiint_{\Omega_1} \rho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \; |J| \, d\rho \, d\theta \, d\varphi \\ &= k \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \rho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \, \rho^2 \operatorname{sen} \varphi d\rho \, d\theta \, d\varphi \\ &= k \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \rho^4 \operatorname{sen}^3 \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta \\ &= k \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5} \rho^5 \operatorname{sen}^3 \varphi \Big|_0^1 d\varphi \, d\theta \\ &= \frac{k}{5} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3 \varphi \, d\varphi \, d\theta \\ &= \frac{k}{5} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen} \varphi d\varphi \, d\theta \\ &= \frac{k}{5} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos^2 \varphi\right) \operatorname{sen} \varphi d\varphi \, d\theta \\ &= \frac{k}{5} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{sen} \varphi - \cos^2 \varphi \operatorname{sen} \varphi\right) d\varphi \, d\theta \\ &= \frac{k}{5} \int_0^{2\pi} \left(-\cos \varphi + \frac{1}{3} \cos^3 \varphi\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\ &= \frac{k}{5} \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{2k}{15} 2\pi \\ &= \frac{4k\pi}{15} \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Inicialmente devemos calcular a interseção entre as superfícies dadas para então parametrizar o resultado obtido. Devemos portanto resolver o seguinte sistema*

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 1 \\ x^2 + z^2 \;\; = 1 \end{cases}$$

Donde segue-se que

$$z = \pm 2y$$

Como devemos ter $y \geq 0$ *e* $z \geq 0$, *a solução será*

$$z = 2y$$

Uma parametrização que obedeça estas condições, pode ser

$$\gamma : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} t \quad ; 0 \leq t \leq \pi \\ z = \operatorname{sen} t \end{cases}$$

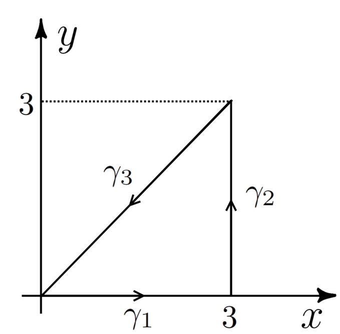
Assim, segue-se que

$$\begin{aligned} A &= \int_\gamma 2y dx + z dy + x dz \\ &= \int_0^\pi - \operatorname{sen}^2 t \, dt + \frac{1}{2} \operatorname{sen} t \cos t \, dt + \cos^2 t \, dt \\ &= \int_0^\pi \left(-1 + 2\cos^2 t + \frac{1}{2} \operatorname{sen} t \cos t\right) dt \\ &= \int_0^\pi \left(\cos 2t + \frac{1}{2} \operatorname{sen} t \cos t\right) dt \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t - \frac{1}{4} \cos^2 t \Big|_0^\pi \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

Exercício 5

a). *Considere a curva* γ *como união das curvas* γ_1, γ_2 *e* γ_3 *conforme esboçado na figura*



Uma parametrização possível para cada um dos trechos da curva γ pode ser dada, conforme está descrito abaixo:

$$\gamma_1 : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 0 \end{cases} ;\ 0 \leq t \leq 3$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x(t) = 3 \\ y(t) = t \end{cases} ;\ 0 \leq t \leq 3$$

$$\gamma_3 : \begin{cases} x(t) = 3 - t \\ y(t) = 3 - t \end{cases} ;\ 0 \leq t \leq 3$$

Sendo

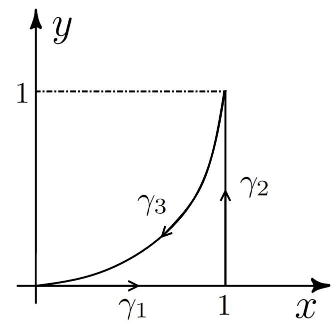
$$F(x,y) = (y^2 - x^2)\mathbf{i} + (x^2 + y^2)\mathbf{j}$$

Teremos,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F \cdot d\gamma &= \int_{\gamma_1} F \cdot d\gamma + \int_{\gamma_2} F \cdot d\gamma + \int_{\gamma_3} F \cdot d\gamma \\
&= \int_0^3 F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) dt + \int_0^3 F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) dt \\
&\quad + \int_0^3 F(\gamma_3(t)) \cdot \gamma_3'(t) dt \\
&= \int_0^3 [F(t,0) \cdot (1,0) + F(3,t) \cdot (0,1) + \\
&\quad + F(3-t, 3-t) \cdot (-1,-1)]\, dt \\
&= \int_0^3 \big[(-t^2, t^2) \cdot (1,0) + (t^2 - 9, 9 + t^2) \cdot (0,1) \\
&\quad + (0, 2(3-t)^2) \cdot (-1,-1)\big]\, dt \\
&= \int_0^3 \left[-t^2 + 9 + t^2 - 2(3-t)^2\right] dt \\
&= \int_0^3 \left(-9 + 12t - 2t^2\right) dt \\
&= \left(-9t + 6t^2 - \frac{2}{3}t^3\right) \Bigg|_0^3 \\
&= 9
\end{aligned}$$

□

b). *Procedendo de modo semelhante ao que foi feito no item anterior, considere a curva γ como união das curvas γ_1, γ_2 e γ_3 conforme esboçado na figura*



Uma parametrização possível para cada um dos trechos da curva γ pode ser dada, conforme está descrito abaixo:

$$\gamma_1 : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 0 \end{cases} ;\ 0 \leq t \leq 1$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = t \end{cases} ;\ 0 \leq t \leq 1$$

$$\gamma_3 : \begin{cases} x(t) = 1 - t \\ y(t) = (1-t)^3 \end{cases} ;\ 0 \leq t \leq 1$$

Sendo

$$F(x,y) = 2xy^3\mathbf{i} + 4x^2y^2\mathbf{j}$$

Teremos,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F \cdot d\gamma &= \int_{\gamma_1} F \cdot d\gamma + \int_{\gamma_2} F \cdot d\gamma + \int_{\gamma_3} F \cdot d\gamma \\
&= \int_0^1 F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) dt + \int_0^1 F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) dt \\
&\quad + \int_0^1 F(\gamma_3(t)) \cdot \gamma_3'(t) dt \\
&= \int_0^1 [F(t,0) \cdot (1,0) + F(1,t) \cdot (0,1) + \\
&\quad + F(1-t, (1-t)^3) \cdot (-1, -3(1-t)^2)\big]\, dt \\
&= \int_0^1 \big[(0,0) \cdot (1,0) + (2t^3, 4t^2) \cdot (0,1) + \\
&\quad + (2(1-t)^{10}, 4(1-t)^8) \cdot (-1, -3(1-t)^2)\big]\, dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left[4t^2 - 2(1-t)^{10} - 12(1-t)^{10}\right] dt \\
&= \int_0^1 \left[4t^2 - 14(1-t)^{10}\right] dt \\
&= \left(\frac{4}{3}t^3 + \frac{14}{11}(1-t)^{11}\right) \Big|_0^1 \\
&= \frac{2}{33}
\end{aligned}
$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III - Turma M3

Prof^o. Edson

3ª Prova **1º Semestre** **2016**

Data: 25 de Agosto **Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Calcule* $\displaystyle\int_\gamma (\operatorname{arctg} x + y^2)\, dx + (e^y - x^2)dy$ *onde* γ *é a fronteira da região do plano formada pelos pontos* (x, y) *tais que* $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$, $y \geq 0$.

Problema 2 *Calcule*

$$\iint_\sigma \frac{xy}{z} ds$$

sendo σ *a região da superfície* $z = x^2+y^2$ *que está entre os cilindros* $x^2+y^2 = 4$ *e* $x^2+y^2 = 16$.

Problema 3 *Calcule o fluxo do campo vetorial* $\mathbf{F}(x, y, z) = 4xy\mathbf{i}+z^2\mathbf{j}+yz\mathbf{k}$ *através do cubo delimitado pelos planos* $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ *e* $z = 1$.

Problema 4 *Calcule* $\displaystyle\iint_\sigma \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds$, *onde* $F(x, y, z) = (4xy + z^2)i + (2x^2 + 6yz)j + 2zxk$, *através da superfície fechada delimitada pelos gráficos de* $x = 4$ *e* $z = 9 - y^2$ *e os planos coordenados.*

Problema 5 *Calcule* $\displaystyle\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\Gamma$, *sendo* $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)\mathbf{i} + \ln\sqrt{x^2 + y^2}\mathbf{j} + \mathbf{k}$, *sendo* Γ *a fronteira do triângulo de vértices* $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$ *e* $(0, 0, 2)$.

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof$^{\text{o}}$. Edson

1$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito 3ª Prova **2016**
Data: Domingo, 4 de Setembro **Turma M3**

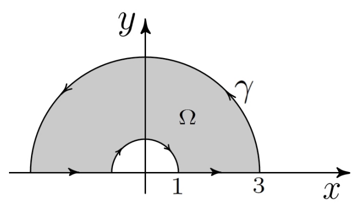
Exercício 1 *Desejamos calcular a integral*

$$A = \int_\gamma (\operatorname{arctg} x + y^2)dx + (e^y - x^2)dy$$

sendo γ a fronteira da região dada por

$$\Omega : \begin{cases} 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Realizando um esboço deste conjunto, obtemos a seguinte figura



*Donde percebe-se que γ é uma curva fechada que, atende às condições do **Teorema de Green**.*

*Usando o **Teorema de Green**, tem-se que*

$$\begin{aligned} A &= \int_\gamma (\operatorname{arctg} x + y^2)dx + (e^y - x^2)dy \\ &= \iint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}(e^y - x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{arctg} x + y^2)\right] dx\, dy \\ &= \iint_\Omega (-2x - 2y)\, dx\, dy \end{aligned}$$

Usando coordenadas polares, ou seja

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \end{cases},$$

cujo jacobiano é

$$|J| = \left\| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right\| = r,$$

o conjunto Ω, neste referencial, torna-se

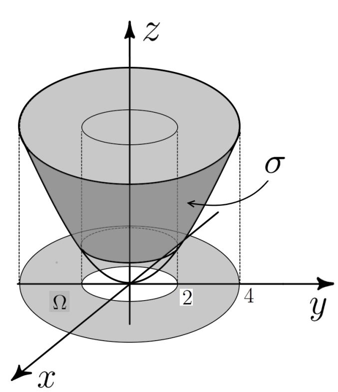
$$\Omega_2 : \begin{cases} 1 \leq r \leq 3 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} A &= -2 \iint_{\Omega_2} (r\cos\theta + r\operatorname{sen}\theta)\, |J|\, dr\, d\theta \\ &= -2 \int_0^\pi \int_1^3 (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\, r^2 dr\, d\theta \\ &= -2 \int_0^\pi (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\, \frac{r^3}{3}\Big|_1^3 d\theta \\ &= -\frac{52}{3}\int_0^\pi (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\, d\theta \\ &= -\frac{52}{3}(\operatorname{sen}\theta - \cos\theta)\Big|_0^\pi \\ &= -\frac{104}{3} \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Realizando um esboço da região de superfície σ, tem-se a seguinte figura*



Uma parametrização possível para esta superfície, é dada por

$$\sigma : \begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = v \\ z(u,v) = u^2 + v^2 \end{cases} ; \quad \underbrace{4 \leq u^2 + v^2 \leq 16}_{\Omega}$$

Diante disto, segue-se que

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u} = (1, 0, 2u)$$
$$\frac{\partial\sigma}{\partial v} = (0, 1, 2v)$$
$$\frac{\partial\sigma}{\partial u} \times \frac{\partial\sigma}{\partial v} = (-2u, -2v, 1)$$
$$\left\| \frac{\partial\sigma}{\partial u} \times \frac{\partial\sigma}{\partial v} \right\| = \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\iint_\sigma \frac{xy}{z} ds &= \iint_\Omega \frac{uv}{u^2+v^2} \left\| \frac{\partial\sigma}{\partial u} \times \frac{\partial\sigma}{\partial v} \right\| dudv \\ &= \iint_\Omega \frac{uv}{u^2+v^2} \sqrt{4u^2+4v^2+1} dudv\end{aligned}$$

Usando coordenadas polares, ou seja

$$\begin{cases} u = r\cos\theta \\ v = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases},$$

cujo jacobiano é

$$|J| = \left\| \frac{\partial(u,v)}{\partial(r,\theta)} \right\| = r,$$

o conjunto Ω*, neste referencial, torna-se*

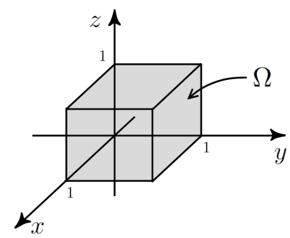
$$\Omega_2 : \begin{cases} 2 \le r \le 4 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\iint_\sigma \frac{xy}{z} ds &= \int_2^4 \int_0^{2\pi} \frac{r\cos\theta\, r\,\mathrm{sen}\,\theta}{r^2} \sqrt{4r^2+1}\,|J|\,d\theta\,dr \\ &= \int_2^4 \int_0^{2\pi} r\sqrt{4r^2+1} \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta\,dr \\ &= \int_2^4 r\sqrt{4r^2+1} \left(\frac{\mathrm{sen}^2\,\theta}{2}\right) \Bigg|_0^{2\pi} dr \\ &= \int_2^4 0r\sqrt{4r^2+1} dr \\ &= 0\end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Desenhando o cubo em questão obtem-se*



Como trata-se de uma superfície fechada, pode-se usar o ***Teorema da Divergência de Gauss****, donde segue-se que o fluxo do campo vetorial*

$$\mathbf{F}(x,y,z) = 4xy\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$$

através da superfície σ *do cubo em questão é dado por*

$$\begin{aligned}\iint_\sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} ds &= \iiint_\Omega \mathrm{div}\,\mathbf{F} dx\,dy\,dz \\ &= \iiint_\Omega \left[\frac{\partial(4xy)}{\partial x} + \frac{\partial(z^2)}{\partial y} + \frac{\partial(yz)}{\partial z}\right] dxdydz \\ &= \iiint_\Omega 5y dx\,dy\,dz\end{aligned}$$

Onde

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \\ 0 \le z \le 1 \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\iint_\sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} ds &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 5y\,dy\,dx\,dz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 5\frac{y^2}{2} \Bigg|_0^1 dx\,dz \\ &= \frac{5}{2} \int_0^1 \int_0^1 dz\,dy \\ &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Como trata-se de uma superfície fechada, pode-se aplicar o* ***Teorema da Divergência de Gauss****, donde segue-se que*

$$\iint_\sigma \mathrm{rot}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} ds = \iiint_\Omega \mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\mathbf{F})\,dx\,dy\,dz$$

sendo Ω *o interior da superfície* σ*.*

Observe que, se

$$\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,yz)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$$

Tem-se

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\mathbf{F} &= \nabla\times\mathbf{F}\\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R \end{vmatrix}\\
&= \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\\
&\quad+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}
\end{aligned}$$

e

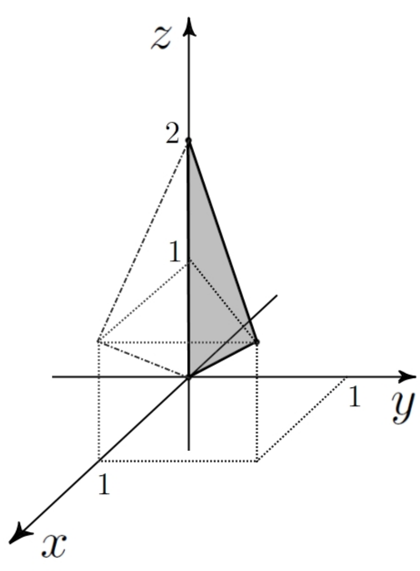
$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F}) &= \nabla\cdot\operatorname{rot}\mathbf{F}\\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\\
&\quad+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\\
&= \frac{\partial R}{\partial x\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x\partial z}+\frac{\partial P}{\partial y\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y\partial x}+\\
&\quad+\frac{\partial Q}{\partial z\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z\partial y}\\
&= 0
\end{aligned}$$

Desde que as funções P, Q e R sejam contínuas e deriváveis até segunda ordem. Com isto segue-se

$$\iint_\sigma \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds = 0$$

Independente do campo vetorial $\mathbf{F}$. ■

Exercício 5 *Realizando um esboço do triângulo em questão, obtemos a seguinte imagem*



Um vez que a fronteira do triângulo dado determina um curva Γ fechada, segue-se que é possível a aplicação do Teorema de Stokes parao cálculo da integral em questão, ou seja

$$\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\Gamma = \iint_\sigma \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds$$

onde σ compreende a superfície do triângulo, cuja parametrização pode ser dada por

$$\sigma:\begin{cases} x(u,v)=u\\ y(u,v)=u\\ z(u,v)=v\end{cases};(u,v)\in\Omega:\begin{cases} 0\le u\le 1\\ u\le v\le 2-u\end{cases}$$

Disto, tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\sigma}{\partial u} &= (1,1,0);\\
\frac{\partial\sigma}{\partial v} &= (0,0,1);\\
\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v} &= (1,-1,0)
\end{aligned}$$

Além disto, sendo

$$\mathbf{F}(x,y,z)=\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)\mathbf{i}+\ln\sqrt{x^2+y^2}\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

tem-se

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\mathbf{F} &= \nabla\times\mathbf{F}\\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) & \ln\sqrt{x^2+y^2} & 1 \end{vmatrix}\\
&= \left(0,0,\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\Gamma &= \iint_\sigma \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds\\
&= \iint_\Omega \operatorname{rot}\mathbf{F}(\sigma(u,v))\cdot\frac{\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}}{\left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right\|}\left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right\|dudv\\
&= \iint_\Omega \operatorname{rot}\mathbf{F}(u,u,v)\cdot(1,-1,0)du\,dv\\
&= \iint_\Omega \left(0,0,\frac{2u}{\sqrt{u^2+u^2}}\right)\cdot(1,-1,0)du\,dv\\
&= \iint_\Omega 0du\,dv\\
&= 0
\end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III - Turma M3

Prof^o. Edson

Prova Final **1^o Semestre** **2016**

Data: 01 de Setembro **Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Resolva a integral*

$$\int_0^2 \int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\, dy\, dx + \int_2^{2\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{8-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dy\, dx$$

Problema 2 *Calcule o volume do sólido limitado pelos gráficos das superfícies* $z = 4 - x^2$ *e* $y = 4 - x^2$.

Problema 3 *Calcule*

$$\int_\gamma 2xy\, dx + (x^2+y^2) dy$$

onde γ *é o trecho da parábola* $y = 4 - x^2$ *que vai do ponto* $(2,0)$ *ao ponto* $(0,4)$.

Problema 4 *Calcule*

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\Gamma$$

onde $\mathbf{F}(x,y,z) = z^2\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$ *e* Γ *é a fronteira da superfície* $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$.

Problema 5 *Calcule o fluxo de* $\mathbf{F}(x,y,z) = x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ *através da superfície do sólido delimitado pelos planos coordenados e o plano* $2x + 3y + 4z = 12$.

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Profº. Edson

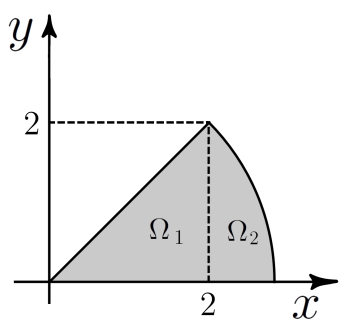
1º Semestre

Gabarito Prova Final **2016**
Data: Segunda-feira, 5 de Setembro **Turma M3**

Exercício 1 *Observe que o domínio de integração é o conjunto* $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$*, sendo*

$$\Omega_1 : \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le x \end{cases}$$
$$\Omega_2 : \begin{cases} 2 \le x \le 2\sqrt{2} \\ 0 \le y \le \sqrt{8 - x^2} \end{cases}$$

Realizando um esboço deste conjunto, obtemos a seguinte figura



Usando coordenadas polares, ou seja

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases},$$

cujo jacobiano é

$$|J| = \left\| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right\| = r,$$

o conjunto Ω*, neste referencial, torna-se*

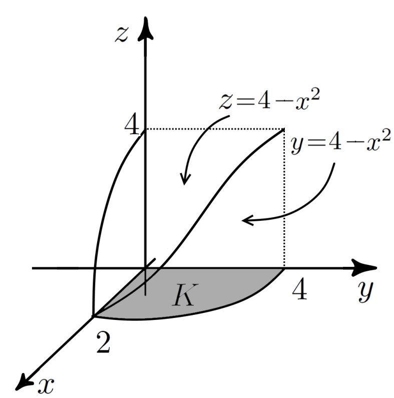
$$\bar{\Omega} : \begin{cases} 0 \le r \le 2\sqrt{2} \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 \int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy + \\ &+ \int_2^{2\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{8-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy \\ &= \iint_{\bar{\Omega}} r\,|J|\;dr\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\sqrt{2}} r^2 dr\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^{2\sqrt{2}} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{16\sqrt{2}}{3} d\theta \\ &= \frac{4\sqrt{2}\pi}{3} \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Realizando um esboço do sólido em questão, obtemos a seguinte figura*



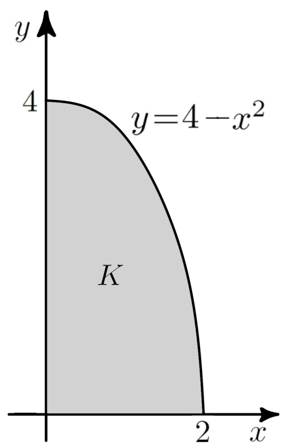
Percebe-se portanto, que tal sólido pode ser expresso como

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le z \le 4 - x^2 \\ (x,y) \in K \end{cases}$$

Para calcular o volume deste sólido, é preciso resolver *a seguinte integral*

$$\begin{aligned} V &= \iiint_\Omega 1 dx\, dy\, dz \\ &= \iint_K \int_0^{4-x^2} z dz\, dx\, dy \\ &= \iint_K \left(4-x^2\right) dx\, dy \end{aligned}$$

Observe que



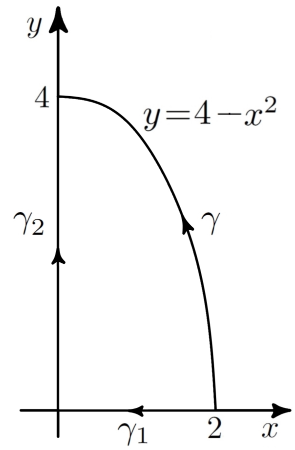
$$K : \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 4-x^2 \end{cases},$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} V &= \iint_K \left(4-x^2\right) dx\, dy \\ &= \int_0^2 \int_0^{4-x^2} \left(4-x^2\right) dy\, dx \\ &= \int_0^2 \left(4-x^2\right) \Big|_0^{4-x^2} dx \\ &= \int_0^2 \left(4-x^2\right)^2 dx \\ &= \int_0^2 \left(16-8x^2+x^4\right) dx \\ &= \frac{256}{15} \end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Realizando um esboço da curva dada, obtem-se*



Observe que, sendo

$$\mathbf{F}(x,y) = 2xy\mathbf{i} + \left(x^2+y^2\right)\mathbf{j}$$

tem-se

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{F} &= \frac{\partial\left(x^2+y^2\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(2xy\right)}{\partial y} \\ &= 2x-2x \\ &= 0 \\ \mathrm{Dom}_{\mathbf{F}} &= \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Ou seja, $\mathbf{F}$ *é um campo conservativo e portanto, a integral dada independe do caminho escolhido, importando apenas o ponto de início e término da curva. Considere assim a curva*

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$$

com

$$\gamma_1 : \begin{cases} x(t) = 2-t \\ y(t) = 0 \end{cases} ; \ 0 \le t \le 2$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = t \end{cases} ; \ 0 \le t \le 4$$

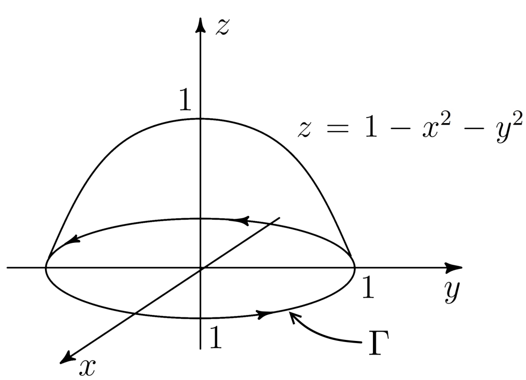
Assim, segue-se que

$$\begin{aligned} S &= \int_\gamma 2xydx + (x^2+y^2)dy \\ &= \int_{\gamma_1} 2xydx + (x^2+y^2)dy + \\ &+ \int_{\gamma_2} 2xydx + (x^2+y^2)dy \end{aligned}$$

$$= \int_0^2 2(2-t)0(-dt) + \left[(2-t)^2 + 0^2\right] 0 +$$
$$+ \int_0^4 2\cdot 0\cdot t\cdot 0 + (0^2+t^2)dt$$
$$= \int_0^4 t^2 dt$$
$$= \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^4$$
$$= \frac{64}{3}$$

■

Exercício 4 *Realizando um esboço da superfície em questão, obtem-se*



Uma parametrização possível para a curva Γ *é dada por*

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \operatorname{sen} t \quad ; \quad 0 \le t \le 2\pi \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

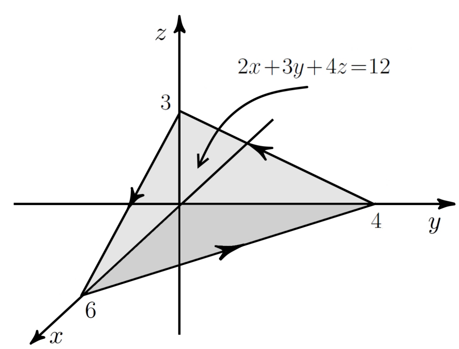
Portanto

$$\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\Gamma = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\Gamma(t))\cdot \Gamma'(t)dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\cos t, \operatorname{sen} t, 0)\cdot(-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)dt$$
$$= \int_0^{2\pi} (0, 2\cos t, \operatorname{sen}^2 t)\cdot(-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)dt$$
$$= \int_0^{2\pi} 2\cos^2 t\, dt$$

$$\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\Gamma = \int_0^{2\pi} 2\frac{1+\cos 2t}{2}dt$$
$$= \int_0^{2\pi} (1+\cos 2t)dt$$
$$= t + \left.\frac{\operatorname{sen} 2t}{2}\right|_0^{2\pi}$$
$$= 2\pi$$

■

Exercício 5 *Realizando um esboço do sólido dado, obtemos a seguinte imagem*



Como a fronteira deste sólido compreende uma superfície fechada, é possível aplicar o ***Teorema da Divergência de Gauss*** *para o cálculo do fluxo do campo vetorial*

$$\mathbf{F}(x,y,z) = x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

através desta superfície.Ou seja

$$\iint_\sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds = \iiint_\Omega \operatorname{div}\mathbf{F} dx\,dy\,dz$$
$$= \iiint_\Omega (3x+1)dx\,dy\,dz$$

sendo

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le x \le 6 \\ 0 \le y \le \dfrac{12-2x}{3} \\ 0 \le z \le \dfrac{12-2x-3y}{4} \end{cases} ;$$

Portanto,

$$\iint_\sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds = \int_0^6\int_0^{\frac{12-2x}{3}}\int_0^{\frac{12-2x-3y}{4}}(3x+1)dz\,dy\,dx$$

$$= \int_0^6\int_0^{\frac{12-2x}{3}}(3x+1)z\Big|_0^{\frac{12-2x-3y}{4}}dy\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^6\int_0^{\frac{12-2x}{3}}(3x+1)(12-2x-3y)dy\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^6\int_0^{\frac{12-2x}{3}}(12+34x-3y-9xy-6x^2)dydx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^6\left(12y+34xy-\frac{3}{2}y^2-\frac{9}{2}xy^2-\right.$$

$$\left.-6x^2y\right)\Big|_0^{\frac{12-2x}{3}}dx$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^6\left(3x^3-35x^2+96x+36\right)dx$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{3}{4}x^4-\frac{35}{3}x^3+48x^2+36x\right)\Big|_0^6$$

$$= 66 \qquad \blacksquare$$

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III - Turma E3

Prof^{o}. Edson

1ª Prova **2º Semestre** **2017**

Data: 16 de Fevereiro **Duração: 10:00 - 12:00**

Problema 1 *Calcule as integrais:*

a). $\displaystyle\int_0^1 \int_{2x}^2 4e^{y^2}\, dy\, dx$;

b). $\displaystyle\int_0^2 \int_{y^2}^4 \sqrt{x}\,\operatorname{sen} x\, dx\, dy$.

Problema 2 *Sendo* Ω *é a região delimitada pelo quadrado de vértices* $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$ *e* $(1,0)$, *calcule a integral*

$$\iint_{\Omega} (x+y)^2 \operatorname{sen}(x-y)\, dx\, dy$$

Problema 3 *Calcule o volume do objeto sólido no primeiro octante delimitado pelas superfícies* $y = 4 - x^2$ *e* $z = 4 - x^2$.

Problema 4 *Calcule*

$$\int_0^2 \int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\, dy\, dx + \int_2^{2\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{8-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dy\, dx$$

.

Problema 5 *Encontre o centro de massa da lâmina plana delimitada pelas curvas* $y = 2x$ *e* $y = 2x^3$, *com* $x \geq 0$ *e* $y \geq 0$ *e cuja densidade no ponto* (x,y) *é proporcional ao produto das distâncias deste ponto aos eixos coordenados.*

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Profº. Edson

2º Semestre

Gabarito 1ª Prova **2016**
Data: Sexta-feira, 10 de Março **Turma E3**

Exercício 1

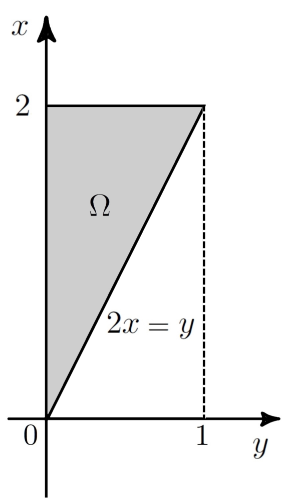
a). *Deseja-se calcular a seguinte integral*

$$A = \int_0^1 \int_{2x}^2 4e^{y^2}\, dy\, dx$$

Observe que o domínio de integração é o conjunto

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 2x \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Realizando um esboço deste conjunto, obtem-se a seguinte figura



Observe, no entanto que, o conjunto Ω também pode ser expresso como

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq \dfrac{y}{2} \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} A &= \iint_{\Omega} 4e^{y^2}\, dx\, dy \\ &= \int_0^2 \int_0^{\frac{y}{2}} 4e^{y^2}\, dx\, dy \\ &= \int_0^2 4e^{y^2}\, x\,\Big|_0^{\frac{y}{2}}\, dy \\ &= \int_0^2 4e^{y^2}\, \frac{y}{2} dy \\ &= e^{y^2}\Big|_0^2 \\ &= e^4 - 1 \end{aligned}$$

$\square$

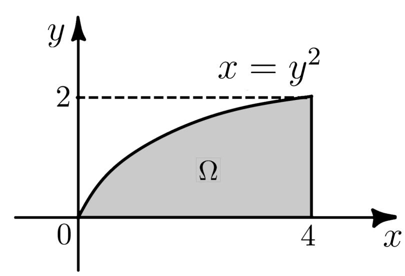
b). *Deseja-se calcular a integral*

$$B = \int_0^2 \int_{y^2}^4 \sqrt{x}\,\text{sen}\, x\, dx\, dy$$

Esta integral iterada corresponde a uma integral dupla cujo domínio de integração é o conjunto

$$\Omega : \begin{cases} y^2 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Realizando um esboço deste conjunto tem-se a seguinte figura



Observe que o conjunto Ω pode também ser expresso como

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{x} \end{cases}$$

Portanto

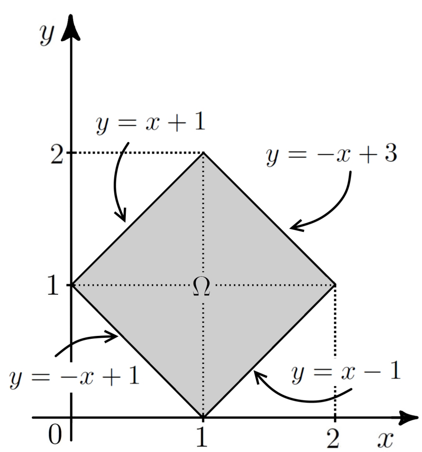
$$\begin{aligned}
B &= \iint_\Omega \sqrt{x}\text{sen}\, x\, dx\, dy \\
&= \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} \sqrt{x}\text{sen}\, x\, dy\, dx \\
&= \int_0^4 \sqrt{x}\text{sen}\, x\, y \Big|_0^{\sqrt{x}} dx \\
&= \int_0^4 x\,\text{sen}\, x\, dx \\
&= (-x\cos x + \text{sen}\, x)\, \Big|_0^4 \\
&= -4\cos 4 + \text{sen}\, 4
\end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Deseja-se calcular a integral*

$$I = \iint_\Omega (x+y)^2\, \text{sen}\, (x-y)\, dx\, dy$$

onde Ω *é o quadrado de vértices* $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$ *e* $(1,0)$, *cujo esboço é dado na figura abaixo*



Para isto, considere a seguinte mudança de variáveis

$$\varphi^{-1} : \begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$$

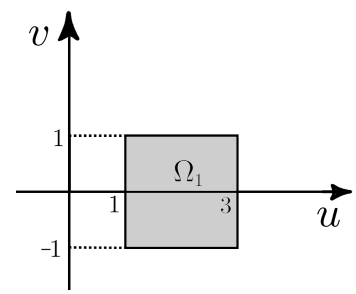
Segue-se disto que

$$\varphi : \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2} \end{cases}$$

e o jacobiano desta transformação é

$$|J| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\begin{array}{cc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right| = \frac{1}{2}.$$

Neste referencial o conjunto Ω *torna-se*



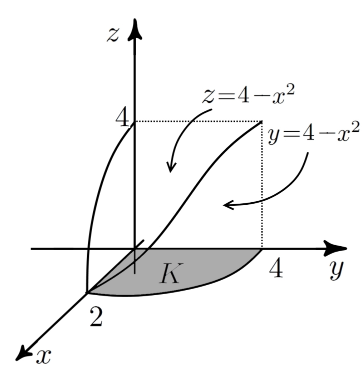
$$\Omega_1 : \begin{cases} 1 \le u \le 3 \\ -1 \le v \le 1 \end{cases}$$

Assim, segue-se que

$$\begin{aligned}
I &= \iint_\Omega (x+y)^2\, \text{sen}\, (x-y)\, dx\, dy \\
&= \iint_{\Omega_1} u^2 \text{sen}\, v\, |J|\, du\, dv \\
&= \frac{1}{2}\int_1^3 \int_{-1}^1 u^2 \text{sen}\, v\, dv\, du \\
&= \frac{1}{2}\int_1^3 -u^2 \cos v \Big|_{-1}^1 du \\
&= -\frac{1}{2}\int_1^3 u^2\, (\cos 1 - \cos(-1))\, du \\
&= 0
\end{aligned}$$

■

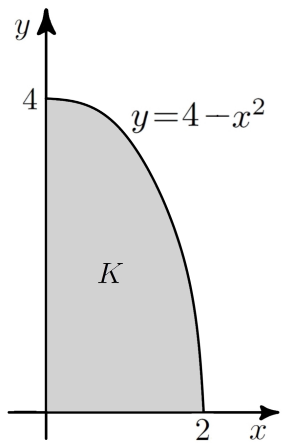
Exercício 3 *Traçando um esboço do sólido em questão, obtemos a seguinte figura*



Assim, o volume deste sólido é dado por

$$V = \iint\limits_K \left(4 - x^2\right) dx\, dy$$

sendo K o conjunto



$$K : \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 4 - x^2 \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \int_0^{4-x^2} \left(4 - x^2\right) dy\, dx \\ &= \int_0^2 \left(4 - x^2\right) y \Big|_0^{4-x^2} dx \\ &= \int_0^2 \left(4 - x^2\right)^2 dx \\ &= \int_0^2 \left(16 - 8x^2 + x^4\right) dx \\ &= \left(16x - \frac{8}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right) \Big|_0^2 \\ &= \left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5}\right) \\ &= \frac{480 - 320 + 96}{15} \\ &= \frac{256}{15} \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Considere*

$$A = \int_0^2 \int_0^x \sqrt{x^2 + y^2} dy\, dx + \\ + \int_2^{2\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{8-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy\, dx$$

Usando-se as propriedades da integral dupla é possivel afirmar que

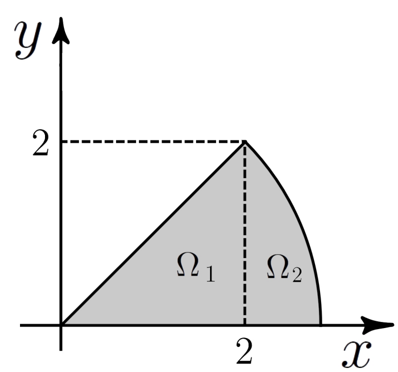
$$\begin{aligned} A &= \iint\limits_{\Omega_1} \sqrt{x^2 + y^2} dy\, dx + \\ &\quad + \iint\limits_{\Omega_2} \sqrt{x^2 + y^2} dy\, dx \\ &= \iint\limits_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \sqrt{x^2 + y^2} dy\, dx \end{aligned}$$

Sendo

$$\Omega_1 : \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le x \end{cases}$$

$$\Omega_2 : \begin{cases} 2 \le x \le 2\sqrt{2} \\ 0 \le y \le \sqrt{8 - x^2} \end{cases}$$

Realizando um esboço destes conjuntos (num mesmo plano cartesiano), tem-se:



Usando-se coordenadas polares,

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r \,\mathrm{sen}\, \theta \end{cases},$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = r$$

O cojunto $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ neste referencial torna-se

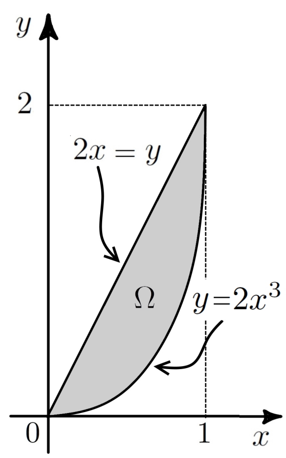
$$\bar{\Omega} : \begin{cases} 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4} \\ 0 \le r \le 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
A &= \iint_{\bar\Omega} \sqrt{r^2}\,|J|\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 d\theta\,dr \\
&= \int_0^{2\sqrt{2}} r^2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} dr \\
&= \frac{\pi}{4}\int_0^{2\sqrt{2}} r^2 dr \\
&= \frac{\pi}{4}\frac{r^3}{3}\Big|_0^{2\sqrt{2}} \\
&= \frac{4\sqrt{2}\pi}{3}
\end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Realizando um esboço da lâmina em questão, tem-se*



Chamando de Ω *o conjunto que representa esta lâmina, segue-se que*

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 2x^3 \le y \le 2x \end{cases}$$

e a massa desta lâmina é dada por

$$M = \iint_{\Omega} \delta(x,y)dx\,dy$$

sendo δ *a densidade da mesma. De acordo com o enunciado do problema,* $\delta(x,y)$ *é proporcional ao produto das distâncias de* (x,y) *aos eixos coordenados, ou seja*

$$\delta(x,y) = kxy,\ k \in \mathbb{R}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
M &= \int_0^1\int_{2x^3}^{2x} kxy\,dy\,dx \\
&= k\int_0^1 \frac{xy^2}{2}\Big|_{2x^3}^{2x} dx \\
&= \frac{k}{2}\int_0^1 x\left(4x^2 - 4x^6\right)dx \\
&= \frac{k}{2}\left(x^4 - \frac{1}{2}x^8\right)\Big|_0^1 \\
&= \frac{k}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_c &= \frac{1}{M}\iint_{\Omega} x\delta(x,y)dx\,dy \\
&= \frac{4}{k}\int_0^1\int_{2x^3}^{2x} kx^2y\,dy\,dx \\
&= 4\int_0^1 \frac{x^2y^2}{2}\Big|_{2x^3}^{2x} dx \\
&= 2\int_0^1 x^2\left(4x^2 - 4x^6\right)dx \\
&= 2\left(\frac{4}{5}x^5 - \frac{4}{9}x^9\right)\Big|_0^1 \\
&= 2\left(\frac{4}{5} - \frac{4}{9}\right) \\
&= \frac{32}{45}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
y_c &= \frac{1}{M}\iint_{\Omega} y\delta(x,y)dx\,dy \\
&= \frac{4}{k}\int_0^1\int_{2x^3}^{2x} kxy^2\,dy\,dx \\
&= 4\int_0^1 \frac{xy^3}{3}\Big|_{2x^3}^{2x} dx \\
&= \frac{4}{3}\int_0^1 x\left(8x^3 - 8x^9\right)dx \\
&= \frac{4}{3}\left(\frac{8}{5}x^5 - \frac{8}{11}x^{11}\right)\Big|_0^1 \\
&= \frac{64}{55}
\end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III - Turma E3

Prof$^{\text{o}}$. Edson

2$^{\text{a}}$ Prova **2$^{\text{o}}$ Semestre** **2016**

Data: 06 de Abril de 2017 **Duração: 10:00 - 12:00**

Problema 1 *Calcule*

$$\iiint_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$$

sendo Ω *a região delimitada pelas superfícies* $z=0$, $z=1+x^2+y^2$ *e* $x^2+y^2 \leq 1$.

Problema 2 *Calcule o volume do sólido no primeiro octante delimitado pelas superfícies* $z=2-y$, $z=4-y^2$, $x=0$, $x=3$ *e* $y=0$.

Problema 3 *Calcule*

$$\int_{\gamma} (x+4\sqrt{y})\,d\gamma$$

onde γ *é a curva fechada correspondente à fronteira do triângulo de vértices (0,0), (1,0) e (0,1) percorrida no sentido anti-horário.*

Problema 4 *Encontre o volume do sólido situado acima do cone* $z^2=x^2+y^2$ *e interior à esfera* $x^2+y^2+z^2=4z$.

Problema 5 *Um sólido é delimitado por* $z=9x^2+y^2$ *e pelo plano* $z=9$. *A densidade deste sólido no ponto (x,y,z) é inversamente proporcional ao quadrado de sua distância ao ponto (0,0,-1). Estabeleça uma integral iterada para encontrar o momento de inércia em relação ao eixo z* ***(não é necessário resolver a integral)****.*

Boa Sorte!

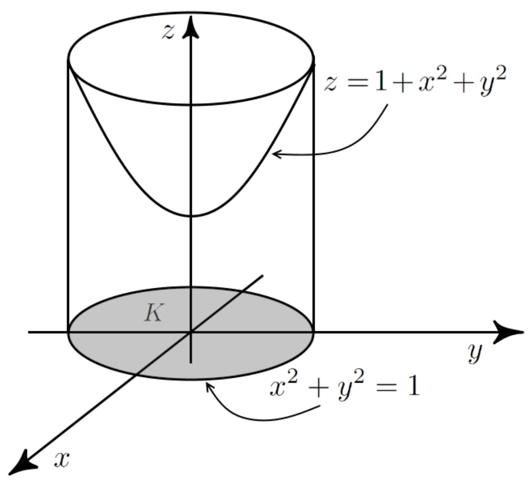
Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^o. Edson

2^o Semestre

Gabarito 2ª Prova **2016**
Data: 26 de Abril de 2017 **Turma E3**

Exercício 1 *Sabe-se que o domínio de integração é a região Ω delimitada pelas superfícies $z = 0$, $z = 1 + x^2 + y^2$ com $x^2 + y^2 \leq 1$. Realizando um esboço de Ω tem-se*



Portanto, é possível expressar tal conjunto como

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq z \leq 1 + x^2 + y^2 \\ (x, y) \in K \end{cases},$$

sendo

$$K = \left\{ (x, y) \in R^2 \middle| \, x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$$

Assim,

$$\begin{aligned} A &= \iiint_\Omega z\sqrt{x^2 + y^2} dx\, dy\, dz \\ &= \iint_K \int_0^{1+x^2+y^2} z\sqrt{x^2 + y^2} dz\, dx\, dy \\ &= \iint_K \sqrt{x^2 + y^2} \frac{z^2}{2} \Big|_0^{1+x^2+y^2} dx\, dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_K \sqrt{x^2 + y^2} \left(1 + x^2 + y^2\right)^2 dx\, dy \end{aligned}$$

Usando-se coordenadas polares, ou seja

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \end{cases},$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = r$$

O conjunto K neste referencial torna-se

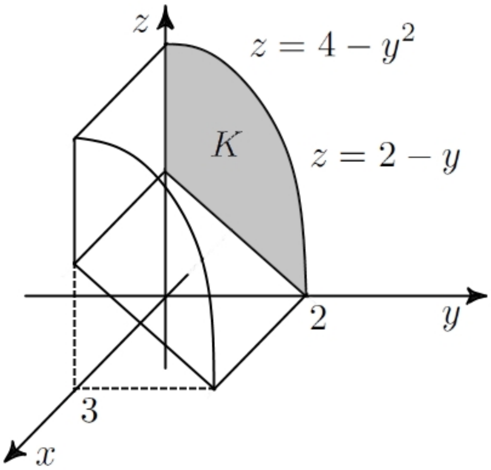
$$K : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases},$$

e disto, segue-se que

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \iint_K \sqrt{x^2 + y^2} \left(1 + x^2 + y^2\right)^2 dx\, dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{r^2} \left(1 + r^2\right)^2 |J|\, dr\, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \left(1 + 2r^2 + r^4\right) dr\, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(r^2 + 2r^4 + r^6\right) dr\, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^3}{3} + \frac{2r^5}{5} + \frac{r^7}{7}\right) \Big|_0^1 d\theta \\ &= \frac{1}{2} \frac{92}{105} \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \frac{92}{105}\, \theta \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{92}{105} \pi \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Realizando um esboço do sólido em* *questão, obtem-se a seguinte figura*



É possível descrever, este sólido da seguinte maneira

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ (y,z) \in K \end{cases},$$

sendo K descrito como

$$K : \begin{cases} 0 \leq y \leq 2 \\ 2 - y \leq z \leq 4 - y^2 \end{cases}.$$

Ou seja,

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 2 \\ 2 - y \leq z \leq 4 - y^2 \end{cases}.$$

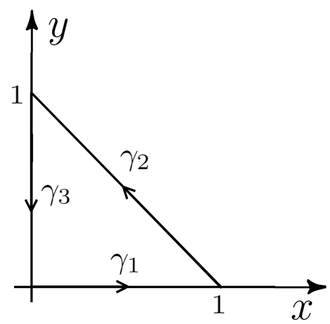
Portanto, o volume de Ω será dado por

$$\begin{aligned} V &= \iiint_\Omega dx\,dy\,dz \\ &= \int_0^2 \int_0^3 \int_{2-y}^{4-y^2} dz\,dx\,dy \\ &= \int_0^2 \int_0^3 z \Big|_{2-y}^{4-y^2} dx\,dy \\ &= \int_0^2 \int_0^3 \left(2 + y - y^2\right) dx\,dy \\ &= \int_0^2 \left(2 + y - y^2\right) x \Big|_0^3 dy \\ &= 3\int_0^2 \left(2 + y - y^2\right) dy \\ &= 3\left(2y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right) \Big|_0^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= 3\frac{10}{3} \\ &= 10 \end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Sabe-se que γ é a curva que corresponde à fronteira do triângulo de vértices* $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ *orientada no sentido anti-horário.*



Uma possível parametrização para γ pode ser dada por

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$$

com

$$\gamma_1 : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 1 \end{cases}, 0 \leq t \leq 1$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x(t) = 1 - t \\ y(t) = t \end{cases}, 0 \leq t \leq 1$$

$$\gamma_3 : \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = 1 - t \end{cases}, 0 \leq t \leq 1$$

Observe que

$$\begin{aligned} \gamma_1'(t) &= (1,0) \\ \gamma_2'(t) &= (-1,1) \\ \gamma_3'(t) &= (0,-1) \end{aligned}$$

e

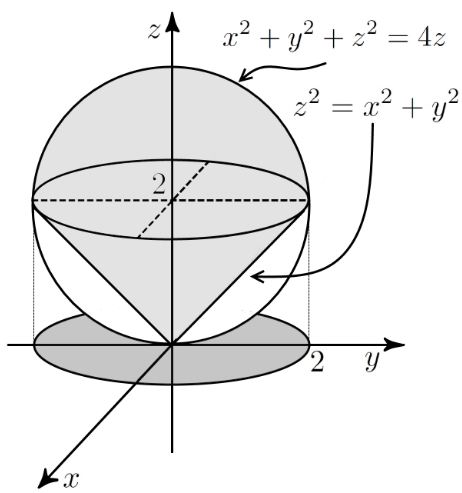
$$\begin{aligned} \|\gamma_1'(t)\| &= 1 \\ \|\gamma_2'(t)\| &= \sqrt{2} \\ \|\gamma_3'(t)\| &= 1 \end{aligned}$$

Chamando de A a integral que deseja-se calcular, tem-se que

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{\gamma} (x + 4\sqrt{y})\, d\gamma \\
&= \int_{\gamma_1} (x+4\sqrt{y})\, d\gamma + \int_{\gamma_2} (x+4\sqrt{y})\, d\gamma + \int_{\gamma_3} (x+4\sqrt{y})\, d\gamma \\
&= \int_0^1 \left(x(t) + 4\sqrt{y\,(t)}\right) \|\gamma_1'(t)\|\, dt + \\
&\quad + \int_0^1 \left(x(t) + 4\sqrt{y\,(t)}\right) \|\gamma_2'(t)\|\, dt + \\
&\quad + \int_0^1 \left(x(t) + 4\sqrt{y\,(t)}\right) \|\gamma_3'(t)\|\, dt \\
&= \int_0^1 t dt + \int_0^1 \left(1 - t + 4\sqrt{t}\right) \sqrt{2} dt + \int_0^1 \left(4\sqrt{1-t}\right) dt \\
&= \frac{t^2}{2} + \sqrt{2}\left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{8}{3}\sqrt{t^3}\right) - \frac{8}{3}\sqrt{(1-t)^3}\,\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{19}{6}(1 + \sqrt{2})
\end{aligned}
$$

■

Exercício 4 *Realizando um esboço do sólido em questão obtem-se a seguinte figura:*



Ou seja, este sólido pode expresso da seguinte forma

$$
\begin{cases}
\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 + \sqrt{4 - x^2 - y^2} \\
x^2 + y^2 \leq 4
\end{cases}
$$

Usando coordenadas cilíndricas,

$$
\begin{cases}
x = r\cos\theta \\
y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\
z = z
\end{cases},
$$

cujo jacobiano é

$$|J| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = r$$

o conjunto Ω neste referencial torna-se

$$
\Omega_2 : \begin{cases}
0 \leq r \leq 2 \\
0 \leq \theta \leq 2\pi \\
r \leq z \leq 2 + \sqrt{4 - r^2}
\end{cases}
$$

Portanto, o volume deste sólido é dado por

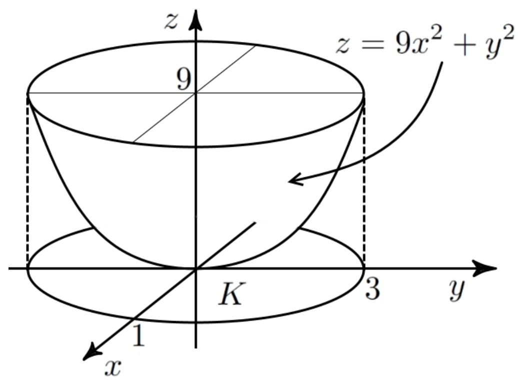
$$
\begin{aligned}
V &= \iiint_{\Omega} dx\, dy\, dz \\
&= \iiint_{\Omega_2} |J|\, dr\, d\theta\, dz \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_r^{2+\sqrt{4-r^2}} r\, dz\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 rz\,\Big|_r^{2+\sqrt{4-r^2}} dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r\left(2 + \sqrt{4 - r^2} - r\right) dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(2r + r\sqrt{4 - r^2} - r^2\right) dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(r^2 - \frac{\sqrt{(4-r^2)^3}}{3} - \frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 d\theta \\
&= 4\int_0^{2\pi} d\theta \\
&= 8\pi
\end{aligned}
$$

(Outro modo:) *Observe que o sólido consiste da composição de uma meia esfera de raio 2 e um cone de base circular de raio 2 e altura 2. Ou seja, o volume deste sólido pode ser obtido da seguinte maneira*

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{2}\mathrm{Vol}(esfera) + \mathrm{Vol}(cone) \\
&= \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 + \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 2 \\
&= \frac{24\pi}{3} \\
&= 8\pi
\end{aligned}
$$

■

Exercício 5 *Realizando um esboço do sólido dado tem-se*



Este sólido pode ser descrito como

$$\Omega : \begin{cases} 9x^2 + y^2 \leq z \leq 9 \\ (x, y) \in K \end{cases}$$

Sendo

$$K = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, 9x^2 + y^2 \leq 9 \right\}$$

Usando coordenadas cilíndricas, ou seja

$$\begin{cases} x = \dfrac{r}{3} \cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases},$$

cujo jacobiano é

$$|J| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = \frac{r}{3}$$

o conjunto Ω neste referencial torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq r \leq 3 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ r^2 \leq z \leq 9 \end{cases}$$

Além disto, é dado que a densidade obedece

$$\delta(x, y, z) = \frac{k}{x^2 + y^2 + (z+1)^2}, \; k \in \mathbb{R}$$

e a distância de um ponto qualquer (x, y, z) ao eixo z é dada por

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Assim

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_\Omega d^2 \delta \, dx \, dy \, dz \\
&= \iiint_\Omega \frac{k(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + (z+1)^2} dx \, dy \, dz \\
&= \iiint_{\Omega_2} \frac{k(\frac{r^2}{9} \cos\theta + r^2 \operatorname{sen}^2\theta)}{\frac{r^2}{9} \cos\theta + r^2 \operatorname{sen}^2\theta + (z+1)^2} \, |J| \, dr \, d\theta \, dz \\
&= \iiint_{\Omega_2} k \frac{r^2 \cos\theta + 9r^2 \operatorname{sen}^2\theta}{r^2 \cos\theta + 9r^2 \operatorname{sen}^2\theta + 9(z+1)^2} \frac{r}{3} dr \, d\theta \, dz \\
&= \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_{r^2}^9 \frac{kr^3}{3} \frac{\left(\cos\theta + 9\operatorname{sen}^2\theta\right) dz \, d\theta \, dr}{r^2 \cos\theta + 9r^2 \operatorname{sen}^2\theta + 9(z+1)^2}
\end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III - Turma E3

Prof$^{\text{o}}$. Edson

3ª Prova **2º Semestre** **2016**

Data: 11 de Maio de 2017 **Duração: 10:00 - 12:00**

Problema 1 *Calcule a área da região do plano delimitada pela curva*

$$\gamma(t) = \left(\frac{3t}{t^3+1}, \frac{3t^2}{t^3+1} \right),\ 0 \leq t \leq 1$$

e o segmento de reta do ponto $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ *ao ponto* $(0,0)$.

Problema 2 *Seja* γ *a fronteira da região delimitada por* $y = 3 - x^2$ *e* $y = 1 + x^4$*, orientada no sentido anti-horário. Calcule*

$$\int_\gamma xy^2 dx + (x^2 y + 3x) dy$$

Problema 3 *Calcule a área da região da superfície* $z = x^2 + y^2$ *que está entre os planos* $z = 1$ *e* $z = 4$.

Problema 4 *Calcule o fluxo* ***externo*** *de* $\mathbf{F}(x,y,z) = x^2\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j} + 3xz\mathbf{k}$ *através da fronteira da região da esfera* $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ *que está no primeiro octante.*

Problema 5 *Calcule*

$$\int_\Gamma y dx + xz dy + z^2 dz$$

onde Γ *é a fronteira da região do plano* $x + y + z = 1$ *que está no primeiro octante, orientada no sentido anti-horário quando vista de cima.*

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^o. Edson

2^o Semestre

Gabarito 3ª Prova **2016**
Data: 15 de Maio de 2017 **Turma E3**

Exercício 1 *Uma parametrização possível para o segmento de reta do ponto $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ ao ponto $(0,0)$ é dada por*

$$\gamma_2 : \begin{cases} x(t) = \frac{3}{2} - t \\ y(t) = \frac{3}{2} - t \end{cases} ; 0 \leq t \leq \frac{3}{2}$$

e a curva correspondente à fronteira da região em questão é

$$\bar{\gamma} = \gamma \cup \gamma_2$$

onde

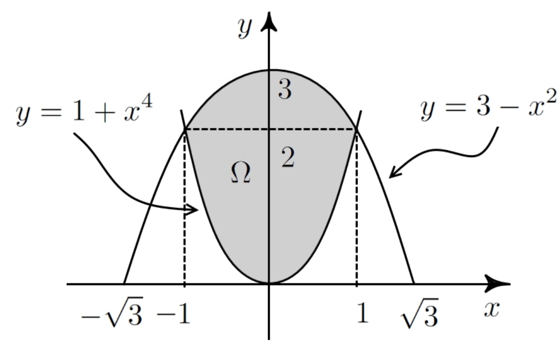
$$\gamma : \begin{cases} x(t) = \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y(t) = \dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases} ; 0 \leq t \leq 1$$

Assim, a área procurada será

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\oint_{\bar{\gamma}} xdy - ydy \\ &= \frac{1}{2}\oint_{\gamma} xdy - ydy + \frac{1}{2}\oint_{\gamma_2} xdy - ydy \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{3t}{1+t^3}\frac{6t-3t^4}{(1+t^3)^2}dt - \frac{3t^2}{1+t^3}\frac{3-6t^3}{(1+t^3)^2}dt + \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{3}{2}} -\left(\frac{3}{2}-t\right)dt + \left(\frac{3}{2}-t\right)dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{18t^2 - 9t^5 - 9t^2 + 18t^5}{(1+t^3)^3}dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{9t^2 + 9t^5}{(1+t^3)^3}dt \\ &= \frac{9}{2}\int_0^1 \frac{t^2\left(1+t^3\right)}{(1+t^3)^3}dt \\ &= \frac{9}{2}\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^3)^2}dt \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Realizando um esboço do sólido em questão, obtem-se a seguinte figura*



Observe que o conjunto Ω que compreende a região delimitada pelas curvas $y = 3 - x^2$ e $y = 1 + x^4$é simplesmente conexo e as funções

$$\begin{aligned} P(x,y) &= xy^2 \\ Q(x,y) &= x^2y + 3x \end{aligned}$$

estão definidas para $\forall(x,y) \in \Omega$. Assim, usando o ***teorema de Green****, tem-se*

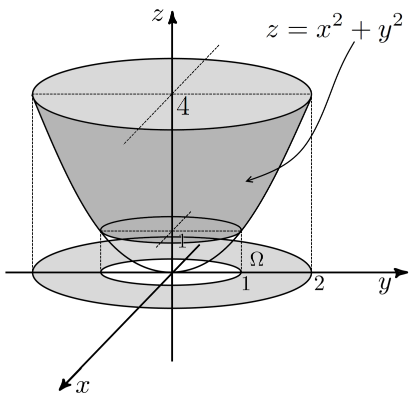
$$\int_\gamma Pdx + Qdy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \int_\gamma xy^2dx + (x^2y+3x)dy &= \iint_\Omega (2xy + 3 - 2xy)\, dx\, dy \\ &= \iint_\Omega 3dx\, dy \\ &= 3\, \acute{A}rea(\Omega) \\ &= 3\int_{-1}^1 (3 - x^2 - 1 - x^4)dx \\ &= 3\left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^1 \\ &= \frac{44}{5} \end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Realizando um esboço da região, obtêm-se*



Uma parametrização possível para esta região é dada por

$$\sigma : \begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = v \\ z(u,v) = u^2 + v^2 \end{cases} \quad ; \underbrace{1 \leq u^2 + v^2 \leq 4}_{\Omega}$$

Disto segue-se que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = (1, 0, 2u)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = (0, 1, 2v)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial u} = (-2u, -2v, 1)$$
$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial u} \right\| = \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}$$

e a área da superfícei σ é

$$\begin{aligned} A &= \iint_{\sigma} ds \\ &= \iint_{\Omega} \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial u} \right\| du\, dv \\ &= \iint_{\Omega} \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1} du\, dv \end{aligned}$$

Usando coordenadas polares,

$$\begin{cases} u = r \cos \theta \\ v = r \operatorname{sen} \theta \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$|J| = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right| = r$$

O conjunto Ω neste referencial, torna-se

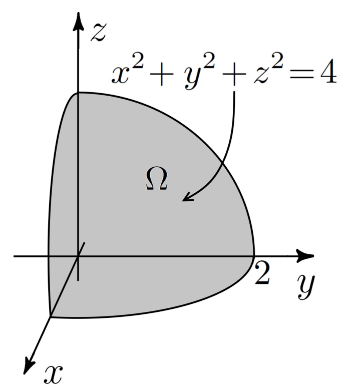
$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 1 \leq r \leq 2 \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 \sqrt{4r^2 + 1}\, |J|\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 r \sqrt{4r^2 + 1} dr\, d\theta \\ &= \frac{\pi}{6} \left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5} \right) \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Realizando um esboço da região σ em questão obtem-se a seguinte figura:*



Perceba que trata-se de uma superfície fechada cujo interior é o conjunto Ω simplesmente conexo no qual o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = x^2 \mathbf{i} - 2xy \mathbf{j} + 3xz \mathbf{k}$$

está definido. Deste modo, aplicando o ***teorema da divergência de Gauss****, tem-se que o fluxo de* $\mathbf{F}$ *através da superfície σ pode ser calculado da seguinte forma*

$$\begin{aligned} fluxo &= \iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds \\ &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F}\, dx\, dy\, dz \end{aligned}$$

Onde

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (-2xy) + \frac{\partial}{\partial z} (3xz) \\ &= 2x - 2x + 3x \\ &= 3x \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\textit{fluxo} = \iiint_{\Omega} 3x \, dx \, dy \, dz$$

Usando coordenadas esféricas,

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases},$$

cujo jacobiano é

$$|J| = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} \right| = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi$$

o conjunto Ω *neste referencial torna-se*

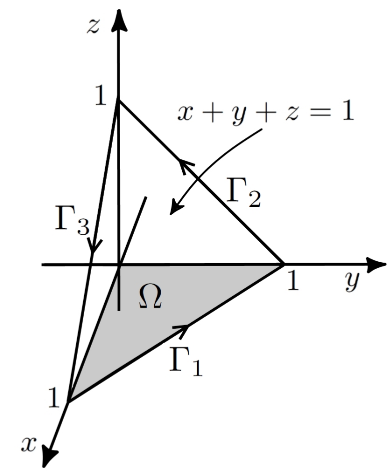
$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \le \rho \le 2 \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \textit{fluxo} &= \iiint_{\Omega} 3x \, dx \, dy \, dz \\ &= \iiint_{\Omega_2} 3\rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \, |J| \, d\rho \, d\theta \, d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 3\rho^3 \operatorname{sen}^2\varphi \cos\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{4} \rho^4 \operatorname{sen}^2\varphi \cos\theta \Big|_0^2 \, d\theta \, d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{4} 16 \operatorname{sen}^2\varphi \cos\theta \, d\theta \, d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 12 \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \, d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 12 \operatorname{sen}^2\varphi \, d\varphi \\ &= 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi \\ &= 6 \left(\varphi - \frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 6 \frac{\pi}{2} \\ &= 3\pi \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Realizando um esboço da região dada tem-se*



Uma parametrização possível para esta região pode ser dada por

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 1 - u - v \end{cases} ; \ (u, v) \in \Omega$$

Sendo

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le u \le 1 \\ 0 \le v \le 1 - u \end{cases}$$

Como a curva correspondente à fronteira desta superfície

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$$

é uma curva fechada e o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$$

está definido sobre a superfície σ *e atende às condições exigidas pelo* ***teorema de Stokes****, segue-se que*

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\Gamma = \iint_{\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds$$

Observe que

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{F}(x, y, z) &= (-x, 0, z - 1) \Rightarrow \\ \operatorname{rot} \mathbf{F}(\sigma(u, v)) &= \operatorname{rot} \mathbf{F}(u, v, 1 - u - v) \\ &= (-u, 0, -u - v) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = (1, 0, -1)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v} = (0, 1, -1)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} = (1, 1, 1)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\Gamma &= \iint_\sigma \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds \\
&= \iint_\Omega \operatorname{rot}\mathbf{F}(\sigma(u,v))\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}\,du\,dv \\
&= \iint_\Omega (-u,0,-u-v)\cdot(1,1,1)du\,dv \\
&= \int_0^1\int_0^{1-u}(-2u-v)\,dv\,du \\
&= \int_0^1 \left(-2uv-\frac{v^2}{2}\right)\Big|_0^{1-u} du \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \big(3u^2-2u-1\big)\,du \\
&= \frac{1}{2}\left(u^3-u^2-u\right)\Big|_0^1 \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III - Turma E3

Prof^{o}. Edson

Prova Final **2^{o} Semestre** **2016**

Data: 18 de Maio de 2017 **Duração: 10:00 - 12:00**

Problema 1 *Calcule*

$$\iint_{\Omega} e^{x+y} dx\, dy$$

sendo Ω *o quadrado de vértices (1,0), (0,1), (-1,0) e (0,-1).*

Problema 2 *Calcule o momento de inércia em relação ao eixo* z *do sólido no primeiro octante delimitados pelos planos* $x + z = 1$ *e* $y + z = 1$*, sendo sua densidade no ponto* (x, y, z) *dada por* $\delta(x, y, z) = z$*.*

Problema 3 *Calcule a área da região do plano delimitada pela curva*

$$\gamma(t) = \left(\frac{3t}{t^3+1}, \frac{3t^2}{t^3+1}\right),\ 0 \leq t \leq 1$$

e o segmento de reta do ponto $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ *ao ponto* $(0, 0)$*.*

Problema 4 *Calcule o fluxo* ***externo*** *do campo vetorial*

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

através da superfície que compreende a fronteira do sólido $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$*.*

Problema 5 *Calcule*

$$\int_{\Gamma} x^2 y^3 dx + dy + z dz$$

onde Γ *é a curva dada pela interseção entre o cilindo* $x^2 + y^2 = 4$ *e o hemisfério* $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z \geq 0$*, orientada no sentido anti-horário quando vista de cima.*

Boa Sorte!

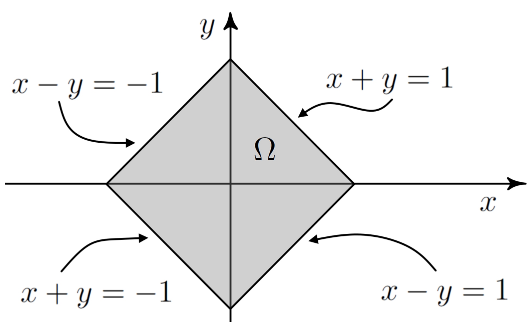
Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof°. Edson

2° Semestre

Gabarito Prova Final **2016**
Data: 20 de Maio de 2017 **Turma E3**

Exercício 1 *Realizando um esboço do conjunto* Ω *obtem-se*



Considere a seguinte mudança de variável

$$\varphi^{-1} : \begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$$

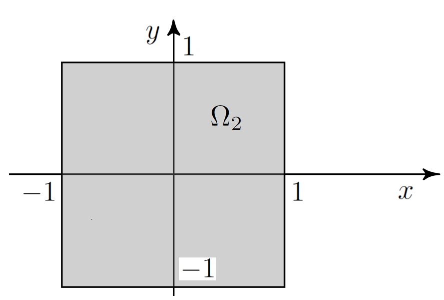
Segue-se desta escolha, que

$$\varphi : \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2} \end{cases}$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{2}$$

Neste referencial o conjunto Ω *torna-se*



$$\Omega_2 : \begin{cases} -1 \le u \le 1 \\ -1 \le v \le 1 \end{cases}$$

Portanto

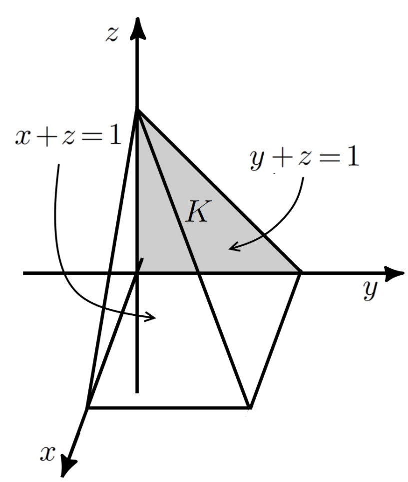
$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} e^{x+y} dx\, dy &= \iint_{\Omega_2} e^u\,|J|\, du\, dv \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1}{2} e^u du\, dv \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} e^u \Big|_{-1}^{1} dv \\ &= \frac{1}{2}\left(e - e^{-1}\right)\int_{-1}^{1} dv \\ &= \frac{1}{2}\left(e - e^{-1}\right) v \Big|_{-1}^{1} \\ &= e - e^{-1}\end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Inicialmente observe que a distância de um ponto qualquer* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *ao eixo* z *é*

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Além disto, um esboçando o sólido em questão obtem-se



Tal sólido pode ser descrito como,

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq z \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 1 - z \\ 0 \leq y \leq 1 - z \end{cases}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_\Omega r^2 \delta \, dx \, dy \, dz \\
&= \iiint_\Omega \left(x^2 + y^2\right) z \, dx \, dy \, dz \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-z} \left(x^2 + y^2\right) z \, dx \, dy \, dz \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-z} \left(\frac{x^3}{3} + y^2 x\right) z \, \Big|_0^{1-z} dy \, dz \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-z} \left[\frac{(1-z)^3}{3} + y^2 (1-z)\right] z dy \, dz \\
&= \int_0^1 \left[\frac{(1-z)^3}{3} y + \frac{y^3}{3} (1-z)\right] z \, \Big|_0^{1-z} dz \\
&= \frac{2}{3} \int_0^1 (1-z)^4 \, z \, dz
\end{aligned}$$

Considere a seguinte mudança de variável

$$\omega = 1 - z$$

Desta escolha segue-se que

$$d\omega = -dz$$

$$z = 0 \Rightarrow \omega = 1$$

$$z = 1 \Rightarrow \omega = 0$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
I &= \frac{2}{3} \int_0^1 (1-z)^4 \, z \, dz \\
&= -\frac{2}{3} \int_1^0 \omega^4 (1 - \omega) \, d\omega \\
&= -\frac{2}{3} \left(\frac{\omega^5}{5} - \frac{\omega^6}{6}\right) \Big|_1^0 \\
&= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) \\
&= \frac{1}{45}
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Exercício 3 *Uma parametrização possível para o segmento de reta do ponto* $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ *ao ponto* $(0,0)$ *é dada por*

$$\gamma_2 : \begin{cases} x(t) = \dfrac{3}{2} - t \\ y(t) = \dfrac{3}{2} - t \end{cases} ; 0 \leq t \leq \frac{3}{2}$$

e a curva correspondente à fronteira da região em questão é

$$\bar{\gamma} = \gamma \cup \gamma_2$$

onde

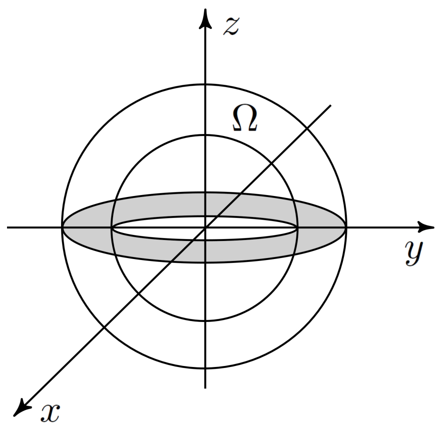
$$\gamma : \begin{cases} x(t) = \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y(t) = \dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases} ; 0 \leq t \leq 1$$

Assim, a área procurada será

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2} \oint_{\bar{\gamma}} x dy - y dy \\
&= \frac{1}{2} \oint_{\gamma} x dy - y dy + \frac{1}{2} \oint_{\gamma_2} x dy - y dy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{3t}{1+t^3} \frac{6t - 3t^4}{(1+t^3)^2} dt - \frac{3t^2}{1+t^3} \frac{3 - 6t^3}{(1+t^3)^2} dt + \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{3}{2} - t\right) dt + \left(\frac{3}{2} - t\right) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{18t^2 - 9t^5 - 9t^2 + 18t^5}{(1+t^3)^3} dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{9t^2 + 9t^5}{(1+t^3)^3} dt \\
&= \frac{9}{2} \int_0^1 \frac{t^2 \left(1 + t^3\right)}{(1+t^3)^3} dt \\
&= \frac{9}{2} \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^3)^2} dt \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Exercício 4 *Realizando um esboço da região σ em questão obtem-se a seguinte figura:*



Perceba que trata-se de uma superfície fechada cujo interior é o conjunto Ω simplesmente conexo no qual o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

*está definido. Deste modo, aplicando o **teorema da divergência de Gauss**, tem-se que o fluxo de $\mathbf{F}$ através da superfície σ pode ser calculado da seguinte forma*

$$\begin{aligned} fluxo &= \iint_\sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds \\ &= \iiint_\Omega \operatorname{div}\mathbf{F}\,dx\,dy\,dz \end{aligned}$$

Onde

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y}\left(y\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z}\left(z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) \\ &= 4\sqrt{x^2+y^2+z^2} \end{aligned}$$

Ou seja,

$$fluxo = \iiint_\Omega 4\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$$

Usando coordenadas esféricas,

$$\begin{cases} x = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases},$$

cujo jacobiano é

$$|J| = \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)}\right| = \rho^2\mathrm{sen}\,\varphi$$

o conjunto Ω neste referencial torna-se

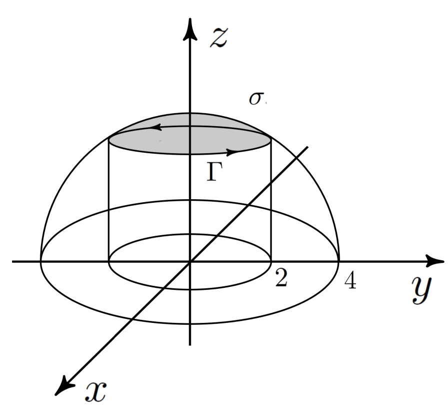
$$\Omega_2 : \begin{cases} 1 \le \rho \le \sqrt{2} \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le \pi \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} fluxo &= \iiint_\Omega 4\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz \\ &= \iiint_{\Omega_2} 4\rho\,|J|\,d\rho\,d\theta\,d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^{\sqrt{2}} 4\rho^3\,\mathrm{sen}\,\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \rho^4\mathrm{sen}\,\varphi\,\Big|_1^{\sqrt{2}}\,d\varphi\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} 3\,\mathrm{sen}\,\varphi\,d\varphi\,d\theta \\ &= 3\int_0^{2\pi} -\cos\varphi\,\Big|_0^{\pi}\,d\theta \\ &= 6\int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 6\,\theta\,\Big|_0^{2\pi} \\ &= 12\pi \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Realizando um esboço da região dada tem-se*



Como Γ é uma curva fechada e o campo vetorial em questão

$$\mathbf{F}(x,y,z) = x^2y^3\mathbf{i} + \mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Obedece aos requisitos necessários ao uso do Teorema de Stokes, segue-se que

$$\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\Gamma = \iint_\sigma \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds$$

Uma parametrização possível para a superfície σ pode ser dada como

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{16-u^2-v^2} \end{cases}, \underbrace{u^2+v^2 \leq 4}_{\Omega}$$

onde

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u} = \left(1, 0, \frac{-u}{\sqrt{16-u^2-v^2}}\right)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial v} = \left(0, 1, \frac{-v}{\sqrt{16-u^2-v^2}}\right)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v} = \left(\frac{u}{\sqrt{16-u^2-y^2}}, \frac{v}{\sqrt{16-u^2-v^2}}, 1\right)$$

e

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2y^3 & 1 & z \end{vmatrix}$$

$$= (0, 0, -3x^2y^2)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
A &= \int_\Gamma x^2y^3dx + dy + z\,dz \\
&= \iint_\sigma \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds \\
&= \iint_\Omega \operatorname{rot}\mathbf{F}(\sigma(u,v))\cdot\frac{\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}}{\left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right\|}\left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right\|du\,dv \\
&= \iint_\Omega (0,0,-3u^2v^2)\cdot\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right)du\,dv \\
&= \iint_\Omega -3u^2v^2du\,dv
\end{aligned}$$

Usando coordenadas polares, ou seja

$$\begin{cases} u = r\cos\theta \\ v = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}, |J| = r$$

O conjunto Ω neste referencial torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
A &= \iint_\Omega -3u^2v^2du\,dv \\
&= \iint_{\Omega_2} -3r^2\cos^2\theta\, r^2\mathrm{sen}^2\theta\ |J|\ dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 -3r^5\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\theta\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}r^6\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\theta\right)\Big|_0^2 d\theta \\
&= -32\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\theta d\theta \\
&= -32\int_0^{2\pi}(\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta)^2\,d\theta \\
&= -32\int_0^{2\pi}\left(\frac{\mathrm{sen}\,2\theta}{2}\right)^2 d\theta \\
&= -8\int_0^{2\pi}\mathrm{sen}^2 2\theta\,d\theta \\
&= -8\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4\theta}{2}d\theta \\
&= -4\int_0^{2\pi}(1-\cos 4\theta)\,d\theta \\
&= -4\left(\theta - \frac{\mathrm{sen}\,4\theta}{4}\right)\Big|_0^{2\pi} \\
&= -8\pi
\end{aligned}$$

□

(Outro modo): *Uma parametrização possível para a curva Γ é dada por*

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = 2\,\mathrm{sen}\,t \\ z(t) = \sqrt{12} \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
A &= \int_\Gamma x^2y^3dx + dy + z\,dz \\
&= \int_0^{2\pi} 4\cos^2 t\, 8\,\mathrm{sen}^3 t\,(-2\mathrm{sen}\, t)dt + 2\cos t dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-64\cos^2 t\,\mathrm{sen}^4 t + 2\cos t\right) dt \\
&= -8\pi
\end{aligned}
$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III - Turma M3

Prof^{o}. Edson

1ª Prova **1º Semestre** **2018**

Data: 26 de Julho **Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Calcule a integral*

$$\iint_{\Omega} \frac{2y+x}{y-2x} dx\, dy$$

onde Ω *é o trapézio delimitado pelos pontos* $(-1,0),(-2,0),(0,4)$ *e* $(0,2)$.

Problema 2 *Calcule as integrais*

a). $\displaystyle\int_1^4 \int_{x^2}^{x} \sqrt{\frac{y}{x}}\, dydx;$

b). $\displaystyle\int_0^3 \int_0^x x^2 e^{xy}\, dydx.$

Problema 3 *Inverta a ordem de integração:*

$$\int_0^3 \left[\int_{x^2-2x}^{\sqrt{3x}} f(x,y)dy \right] dx$$

Problema 4 *Usando intregral dupla, calcule a área da região plana compreendida entre curvas* $y^2 = 9 - x$ *e* $y^2 = 9 - 9x$.

Problema 5 *Encontre o centro de massa da lâmina plana delimitada pelas curvas* $y = 2x$ *e* $y = 2x^3$, *com* $x \geq 0$ *e* $y \geq 0$ *e cuja densidade no ponto* (x,y) *é proporcional ao produto das distâncias deste ponto aos eixos coordenados.*

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^{o}. Edson

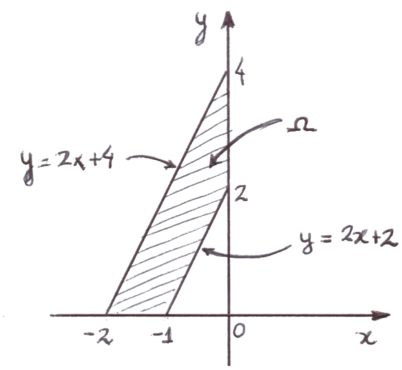
1^{o} Semestre

Gabarito 1ª Prova **2018**
Data: Domingo, 9 de Setembro **Turma M3**

Exercício 1 *Desejamos calcular a integral*

$$\iint_{\Omega} \frac{2y+x}{y-2x} dx\, dy$$

onde Ω é o trapézio esboçado na figura abaixo



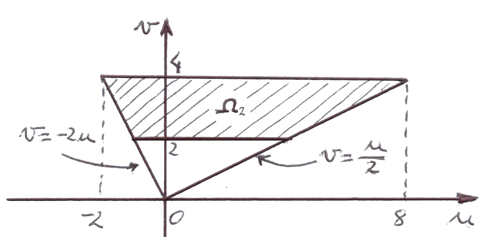
Para isto, considere a seguinte mudança de variáveis

$$\varphi^{-1} : \begin{cases} u = 2y + x \\ v = y - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \varphi : \begin{cases} x = \dfrac{u-2v}{5} \\ y = \dfrac{2u+v}{5} \end{cases},$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \frac{1}{5}$$

e, neste novo sistema de coordenadas, o conjunto Ω torna-se



$$\Omega_2 : \begin{cases} -\dfrac{v}{2} \leq u \leq 2v \\ 2 \leq v \leq 4 \end{cases}$$

e, disto segue-se que

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega} \frac{2y+x}{y-2x} dx\, dy &= \iint_{\Omega_2} \frac{u}{v} \frac{1}{5} du\, dv \\
&= \frac{1}{5} \int_2^4 \int_{-\frac{v}{2}}^{2v} \frac{u}{v} du\, dv \\
&= \frac{1}{5} \int_2^4 \left. \frac{u^2}{2v} \right|_{-\frac{v}{2}}^{2v} dv \\
&= \frac{1}{10} \int_2^4 \left(4v - \frac{v}{4} \right) dv \\
&= \frac{3}{16}\, v^2 \Big|_2^4 \\
&= \frac{9}{4}
\end{aligned}$$

■

Exercício 2

a).

$$\begin{aligned}
\int_1^4 \int_{x^2}^{x} \sqrt{\frac{y}{x}} dy\, dx &= \int_1^4 \int_{x^2}^{x} \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} dy\, dx \\
&= \int_1^4 \left. \frac{2}{3} \frac{\sqrt{y^3}}{\sqrt{x}} \right|_{x^2}^{x} dx \\
&= \frac{2}{3} \int_1^4 \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt{x^6}}{\sqrt{x}} dx \\
&= \frac{2}{3} \int_1^4 \left(x - x^{\frac{5}{2}} \right) dx \\
&= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{2}{7} \sqrt{x^7} \right) \Bigg|_1^4 \\
&= \frac{2}{3} \left(-\frac{200}{7} - \frac{3}{14} \right) \\
&= -\frac{403}{21}
\end{aligned}$$

□

b).

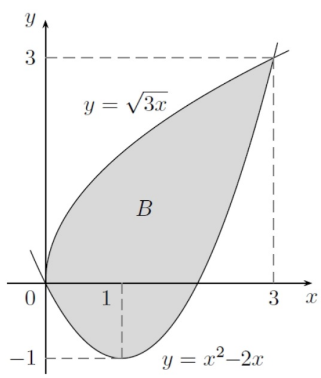
$$\int_0^3\int_0^x x^2e^{xy}dy\,dx = \int_0^3 x^2\frac{1}{x}e^{xy}\Big|_0^x dx$$
$$= \int_0^3 \left(xe^{x^2}-x\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(e^{x^2}-x^2\right)\Big|_0^3$$
$$= \frac{1}{2}\left(e^9-9\right)-\frac{1}{2}$$
$$= \frac{e^9}{2}-5$$

■

Exercício 3 *O domínio de integração na integral dada é o conjunto*

$$B:\begin{cases} 0\le x\le 3\\ x^2-2x\le y\le\sqrt{3x}\end{cases}$$

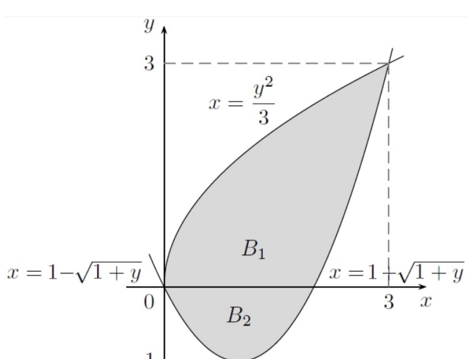
Desenhando este conjunto, teremos a seguinte figura



Donde segue-se que o conjunto B pode ser reescrito como

$$B=B_1\cup B_2$$

onde



$$B_1:\begin{cases}\frac{y^2}{3}\le x\le 1+\sqrt{1+y}\\ 0\le y\le 3\end{cases}$$

e

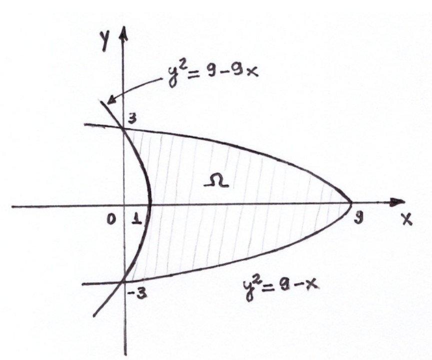
$$B_2:\begin{cases}1-\sqrt{1+y}\le x\le 1+\sqrt{1+y}\\ -1\le y\le 0\end{cases}$$

Portanto

$$\int_0^3\int_{x^2-2x}^{\sqrt{3x}} f(x,y)dydx = \iint_B f(x,y)dxdy$$
$$= \iint_{B_1} f(x,y)dxdy + $$
$$+ \iint_{B_2} f(x,y)dxdy$$
$$= \int_0^3\int_{\frac{y^2}{3}}^{1+\sqrt{1+y}} f(x,y)dxdy +$$
$$+ \int_{-1}^0\int_{1-\sqrt{1+y}}^{1+\sqrt{1+y}} f(x,y)dxdy$$

■

Exercício 4 *A região plana Ω compreendida entre as curvas $y^2=9-x$ e $y^2=9-9x$ pode ser visualizada no seguinte esboço*



Observe então, que a região Ω pode ser descrita do seguinte modo

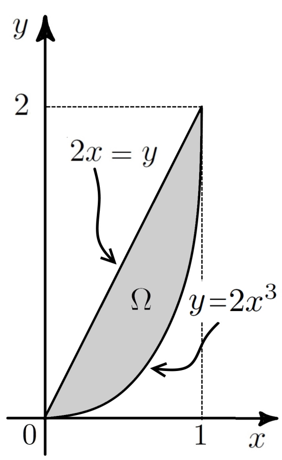
$$\Omega:\begin{cases}\frac{9-y^2}{9}\le x\le 9-y^2\\ -3\le y\le 3\end{cases}$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
Área(\Omega) &= \iint_\Omega dx\,dy \\
&= \int_{-3}^{3}\int_{\frac{9-y^2}{9}}^{9-y^2} dx\,dy \\
&= \int_{-3}^{3} x\,\Big|_{\frac{9-y^2}{9}}^{9-y^2} dy \\
&= \frac{1}{9}\int_{-3}^{3}\left(72-8y^2\right)dy \\
&= \frac{1}{9}\left(72y-\frac{8}{3}y^3\right)\Big|_{-3}^{3} \\
&= \frac{144+144}{9} \\
&= 32
\end{aligned}
$$

■

Exercício 5 *Realizando um esboço da lâmina em questão, tem-se*



Chamando de Ω *o conjunto que representa esta lâmina, segue-se que*

$$
\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 2x^3 \leq y \leq 2x \end{cases}
$$

e a massa desta lâmina é dada por

$$
M = \iint_\Omega \delta(x,y)dx\,dy
$$

sendo δ *a densidade da mesma. De acordo com o enunciado do problema,* $\delta(x,y)$ *é proporcional ao produto das distâncias de* (x,y) *aos eixos coordenados, ou seja*

$$
\delta(x,y) = kxy,\ \ k \in \mathbb{R}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
M &= \int_0^1\int_{2x^3}^{2x} kxy\,dy\,dx \\
&= k\int_0^1 \frac{xy^2}{2}\Big|_{2x^3}^{2x} dx \\
&= \frac{k}{2}\int_0^1 x\left(4x^2-4x^6\right)dx \\
&= \frac{k}{2}\left(x^4-\frac{1}{2}x^8\right)\Big|_0^1 \\
&= \frac{k}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_c &= \frac{1}{M}\iint_\Omega x\delta(x,y)dx\,dy \\
&= \frac{4}{k}\int_0^1\int_{2x^3}^{2x} kx^2y\,dy\,dx \\
&= 4\int_0^1 \frac{x^2y^2}{2}\Big|_{2x^3}^{2x} dx \\
&= 2\int_0^1 x^2\left(4x^2-4x^6\right)dx \\
&= 2\left(\frac{4}{5}x^5-\frac{4}{9}x^9\right)\Big|_0^1 \\
&= 2\left(\frac{4}{5}-\frac{4}{9}\right) \\
&= \frac{32}{45}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
y_c &= \frac{1}{M}\iint_\Omega y\delta(x,y)dx\,dy \\
&= \frac{4}{k}\int_0^1\int_{2x^3}^{2x} kxy^2\,dy\,dx \\
&= 4\int_0^1 \frac{xy^3}{3}\Big|_{2x^3}^{2x} dx \\
&= \frac{4}{3}\int_0^1 x\left(8x^3-8x^9\right)dx \\
&= \frac{4}{3}\left(\frac{8}{5}x^5-\frac{8}{11}x^{11}\right)\Big|_0^1 \\
&= \frac{64}{55}
\end{aligned}
$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III - Turma M3

Prof^o. Edson

2ª Prova **1º Semestre** **2018**

Data: 04 de Setembro **Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Calcule a integral*

$$\iiint_\Omega (z-y)^2\, xy\, dx\, dy\, dz$$

sendo Ω *a região delimitada pelos gráficos de* $x = 1$, $x = 3$, $z = y$, $z = y+1$, $xy = 2$, $xy = 4$.

Problema 2 *Calcule o volume da região acima do plano* $z = 0$ *e abaixo da superfície* $\sqrt{x^2+y^2} = 1 - z$

Problema 3 *Calcule a integral iterada*

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}} \left(x^2+y^2+z^2\right) dx\, dy\, dz.$$

Problema 4 *Calcule a integral*

$$\int_{-\gamma} \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$$

sendo γ *o círculo* $x^2+y^2 = a^2$ *percorrido no sentido*

Problema 5 *Calcule*

$$\int_\gamma \mathbf{F} d\gamma$$

sendo $\mathbf{F}(x,y) = 2xy\mathbf{i} + (x^2 + \cos y)\mathbf{j}$ *e* $\gamma(t) = \left(t, t\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right)$ $0 \le t \le \pi$.

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof$^{\text{o}}$. Edson

1º Semestre

Gabarito 2ª Prova **2018**
Data: Domingo, 9 de Setembro **Turma M3**

Exercício 1 *Considere a seguinte mudança de variáveis*

$$\varphi^{-1} : \begin{cases} u = z - y \\ v = xy \\ w = x \end{cases}$$

Observe que

$$\varphi : \begin{cases} x = w \\ y = \dfrac{v}{w} \\ z = u + \dfrac{v}{w} \end{cases}$$

e seu jacobiano é dado por

$$\begin{aligned} |J| &= \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| \\ &= \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{1}{w} & -\dfrac{v}{w^2} \\ 1 & \dfrac{1}{w} & -\dfrac{v}{w^2} \end{matrix} \right\| \\ &= \frac{1}{w} \end{aligned}$$

Neste referencial o conjunto Ω dado no problema, torna-se

$$\begin{aligned} x = 1 & & & \Leftrightarrow & w = 1 \\ x = 3 & & & \Leftrightarrow & w = 3 \\ z = y & \Leftrightarrow & z - y = 0 & \Leftrightarrow & u = 0 \\ z = y + 1 & \Leftrightarrow & z - y = 1 & \Leftrightarrow & u = 1 \\ xy = 2 & & & \Leftrightarrow & v = 2 \\ xy = 4 & & & \Leftrightarrow & v = 4 \end{aligned}$$

Ou seja,

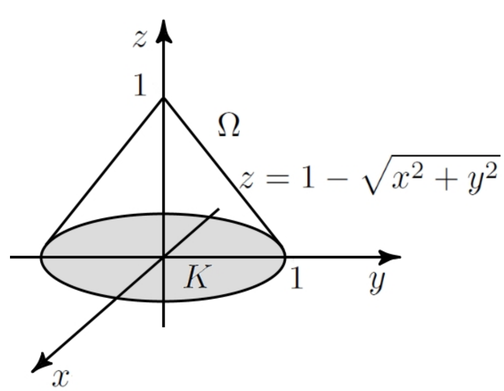
$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \le u \le 1 \\ 2 \le v \le 4 \\ 1 \le w \le 3 \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} A &= \iiint_{\Omega} (z-y)^2 \, dx \, dy \, dz \\ &= \iiint_{\Omega_2} u^2 \, |J| \, du \, dv \, dw \\ &= \iiint_{\Omega_2} \frac{u^2}{w} \, du \, dv \, dw \\ &= \int_2^4 \int_1^3 \int_0^1 \frac{u^2}{w} \, du \, dw \, dv \\ &= \int_2^4 \int_1^3 \left. \frac{u^3}{3w} \right|_0^1 dw \, dv \\ &= \int_2^4 \int_1^3 \frac{1}{3w} dw \, dv \\ &= \int_2^4 \left. \frac{1}{3} \ln w \right|_1^3 dv \\ &= \int_2^4 \frac{1}{3} \ln 3 \, dv \\ &= \frac{2}{3} \ln 3 \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Realizando um esboço da região Ω em questão, obtem-se*



Tal região pode ser descrita como

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \\ (x, y) \in K \end{cases}$$

Sendo K o círculo $x^2 + y^2 \leq 1$. Usando coordenadas cilíndricas, ou seja

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases},$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)}\right| = r$$

O conjunto Ω neste referencial torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq 1 - r \end{cases}$$

Portanto

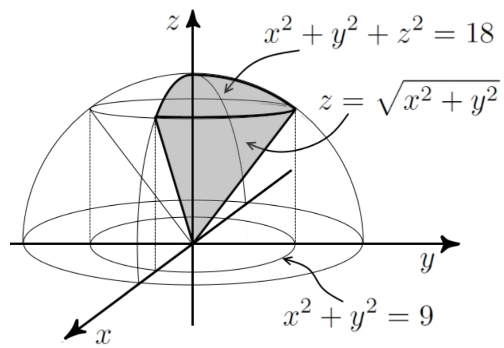
$$\begin{aligned} V(\Omega) &= \iiint_\Omega 1\, dx\, dy\, dz \\ &= \iiint_{\Omega_2} |J|\ dr\, d\theta\, dz \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1-r} r\, dz\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 rz\,\Big|_0^{1-r} dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\,(1-r)\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{3}r^3\right)\Big|_0^1 d\theta \\ &= \frac{1}{6}\int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{1}{6}\,\theta\,\Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

■

Exercício 3 *O domínio de integração na integral dada é o conjunto*

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq y \leq 3 \\ 0 \leq x \leq \sqrt{9 - y^2} \\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{18 - x^2 - y^2} \end{cases}$$

Realizando um esboço deste conjunto, obtem-se a seguinte figura



Usando coordenadas esféricas, ou seja

$$\begin{cases} x = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = \rho\,\cos\varphi \end{cases},$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \rho^2 \mathrm{sen}\,\varphi,$$

segue-se que, neste referencial o conjunto Ω torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{4} \\ 0 \leq \rho \leq 3\sqrt{2} \\ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
A &= \iiint_{\Omega} \left(x^2+y^2+z^2\right) dx\, dy\, dz \\
&= \iiint_{\Omega_2} \rho^2\, |J|\, d\rho\, d\theta\, d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{3\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^4 \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi\, d\rho\, d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{3\sqrt{2}} -\rho^4 \cos\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} d\rho\, d\theta \\
&= \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{3\sqrt{2}} \rho^4 d\rho\, d\theta \\
&= \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5}\rho^5 \Big|_0^{3\sqrt{2}} d\theta \\
&= 4\sqrt{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \frac{243}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\
&= \frac{486\pi}{5}\left(\sqrt{2}-1\right)
\end{aligned}
$$

■

Exercício 4 *Uma parametrização possível para a curva γ é dada por*

$$
\gamma : \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a \operatorname{sen} t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\int_{-\gamma} \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} &= -\int_{\gamma} \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} \\
&= -\int_0^{2\pi} \frac{a^2\cos^2 t + a^2 \operatorname{sen}^2 t}{a^2} dt \\
&= -\int_0^{2\pi} dt \\
&= -2\pi
\end{aligned}
$$

■

Exercício 5 *Observe que*

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Rot}\mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+\cos y\right) - \frac{\partial}{\partial y}(2xy) \\
&= 2x - 2x \\
&= 0
\end{aligned}
$$

e

$$
\operatorname{Dom}_{\mathbf{F}} = \mathbb{R}^2\, (simplesmente\, conexo)
$$

Logo, F é um campo conservativo, ou seja a integral de linha sobre F não depende do caminho, importando apenas os pontos inicial e final da curva γ. Perceba, portanto que

$$
\begin{aligned}
\gamma(0) &= (0,0) \\
\gamma(\pi) &= \left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Considere a curva $\alpha = \gamma_1 \cup \gamma_2$, sendo

$$
\gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}, \quad 0 \le t \le \pi
$$

$$
\gamma_2 : \begin{cases} x = \pi \\ y = t \end{cases}, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}
$$

A curva α possui os mesmos pontos inicial e final da curva γ. Trocando γ por α e calculando a integral dada, tem-se

$$
\begin{aligned}
\int_{\gamma} \mathbf{F}\, d\gamma &= \int_{\alpha} \mathbf{F}\, d\alpha \\
&= \int_{\gamma_1} \mathbf{F}\, d\gamma + \int_{\gamma_2} \mathbf{F}\, d\gamma \\
&= \int_0^{\pi} \mathbf{F}\left(\gamma_1(t)\right)\cdot \gamma_1'(t) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{F}\left(\gamma_2(t)\right)\cdot\gamma_2'(t) dt \\
&= \int_0^{\pi} \left(0, t^2+1\right)\cdot(1,0)dt + \\
&\quad + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2\pi t, \pi^2+\cos t\right)\cdot(0,1)dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi^2+\cos t)dt \\
&= \left(\pi^2 t + \operatorname{sen} t\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi^3}{2} + 1
\end{aligned}
$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III - Turma M3

Prof$^{\text{o}}$. Edson

3ª Prova | **1º Semestre** | **2018**

Data: Quinta-feira, 27 de Setembro | **Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Calcule*

$$\iint_{\sigma} x dS$$

onde σ *é a superficie* $y = x^2 + 4z$ *com* $0 \leq x \leq 2$ *e* $0 \leq y \leq 2$.

Problema 2 *Calcule a massa da superfície* $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, *cuja densidade em cada ponto é igual a distância deste ponto ao plano xy.*

Problema 3 *Calcule o fluxo de* $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ *através da região da superfície* $x^2 + z^2 = 1$ *entre os planos* $y = 1$ *e* $y = -2$, *orientada por vetores normais unitários para fora.*

Problema 4 *Calcule o fluxo de* $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2+y)\mathbf{i}+xy\mathbf{j}-(2xz+y)\mathbf{k}$ *através da superfície que corresponde à fronteira do tetraedro limitado pelo plano* $x + y + z = 1$ *e os planos orientados.*

Problema 5 *Calcule*

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\Gamma$$

sendo $\mathbf{F}(x, y, z) = -3y^2\mathbf{i} + 4z\mathbf{j} + 6x\mathbf{k}$ *e* Γ *é a fronteira do triângulo de vértices* $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 1)$ *e* $(0, 0, 0)$ *com orientação anti-horária olhando do eixo* z *de cima para baixo.*

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^{o}. Edson

1^{o} Semestre

Gabarito 3ª Prova **2018**
Data: Segunda-feira, 1 de Outubro **Turma M3**

Exercício 1 *Uma parametrização possível para a superfície em questão é dada por*

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \dfrac{v - u^2}{4} \end{cases}, \; (u, v) \in K$$

sendo

$$K : \begin{cases} 0 \leq u \leq 2 \\ 0 \leq v \leq 2 \end{cases}$$

Disto segue-se que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = \left(1, 0, -\frac{u}{2}\right)$$
$$\frac{\partial \sigma}{\partial v} = \left(0, 1, \frac{1}{4}\right)$$
$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} = \left(\frac{u}{2}, -\frac{1}{4}, 1\right)$$

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| = \sqrt{\frac{u^2}{4} + \frac{1}{16} + 1} = \sqrt{\frac{4u^2 + 17}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{4u^2 + 17}$$

Portanto,

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq u \leq 1 \\ 2 \leq v \leq 4 \\ 1 \leq w \leq 3 \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \iint_\sigma x \, dS &= \iint_K u \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| du \, dv \\ &= \iint_K u \frac{1}{4}\sqrt{4u^2 + 17} \, du \, dv \\ &= \frac{1}{4}\int_0^2 \int_0^2 u\sqrt{4u^2 + 17} \, dv \, du \\ &= \frac{1}{4}\int_0^2 u\sqrt{4u^2 + 17} v \Big|_0^2 du \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 u\sqrt{4u^2 + 17} \, du \end{aligned}$$

Considere
$$\omega = 4u^2 + 17$$
e observe que
$$d\omega = 8u \, du$$
e
$$u = 0 \Rightarrow \omega = 17$$
$$u = 2 \Rightarrow \omega = 33$$

Ou seja

$$\begin{aligned} \iint_\sigma x \, dS &= \frac{1}{2}\int_0^2 u\sqrt{4u^2 + 17} \, du \\ &= \frac{1}{16}\int_{17}^{33} \sqrt{\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{16} \; \frac{2}{3}\sqrt{\omega^3} \Big|_{17}^{33} \\ &= \frac{1}{24}\left(\sqrt{33^3} - \sqrt{17^3}\right) \\ &= \frac{33\sqrt{33} - 17\sqrt{17}}{24} \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *A distância de um ponto de coordenadas (x, y, z) ao plano xy é dado por sua coordenada z, ou seja, a densidade da lâmina em questão é*

$$\delta(x, y, z) = z$$

Além disto, a superfície dada pode ser parametrizada da seguinte forma

$$\sigma : \begin{cases} x = 2 \operatorname{sen} u \cos v \\ y = 2 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ z = 2 \cos u \end{cases}, (u, v) \in K$$

sendo

$$K : \begin{cases} 0 \leq u \leq \pi \\ 0 \leq v \leq 2\pi \end{cases}$$

Desta escolha de parametrização segue-se que

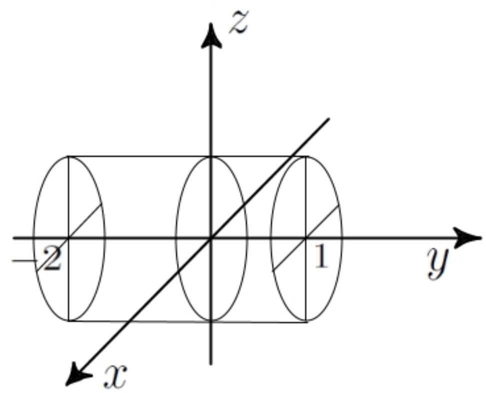
$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| = 4 \operatorname{sen} u$$

Assim,

$$\begin{aligned} M(\sigma) &= \iint_\sigma \delta(x, y, z)\, dS \\ &= \iint_K \delta(\sigma(u, v))\, du\, dv \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} 2 \cos u \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| dv\, du \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} 8 \cos u \operatorname{sen} u\, dv\, du \\ &= \int_0^\pi 8 \cos u \operatorname{sen} u\, v \Big|_0^{2\pi} du \\ &= 16\pi \int_0^\pi \cos u \operatorname{sen} u\, du \\ &= 16\pi\, \frac{\cos^2 u}{2} \Big|_0^\pi \\ &= 8\pi\,(1 + 1) \\ &= 16\pi \end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Realizando um esboço da superfície em questão, obtêm-se*



Uma parametrização possível para esta superfície é dada por

$$\sigma : \begin{cases} x = \cos u \\ y = v \\ z = \operatorname{sen} u \end{cases}, (u, v) \in K$$

com

$$K : \begin{cases} 0 \leq u \leq 2\pi \\ -2 \leq v \leq 1 \end{cases}$$

Assim, tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial u} &= (-\operatorname{sen} u, 0, \cos u) \\ \frac{\partial \sigma}{\partial v} &= (0, 1, 0) \\ \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} &= (-\cos u, 0, -\operatorname{sen} u) \end{aligned}$$

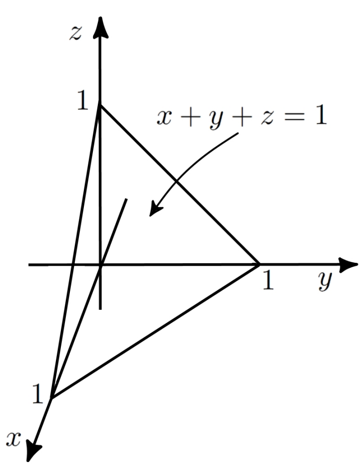
$$\mathbf{n} = -\frac{\dfrac{\partial \sigma}{\partial u} \times \dfrac{\partial \sigma}{\partial v}}{\left\| \dfrac{\partial \sigma}{\partial u} \times \dfrac{\partial \sigma}{\partial v} \right\|}$$

E o fluxo de F através de σ, é dado por

$$\begin{aligned}
\tau &= \iint_\sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS \\
&= \iint_\sigma \mathbf{F}(\sigma(u,v))\cdot\left(-\frac{\dfrac{\partial\sigma}{\partial u}\times\dfrac{\partial\sigma}{\partial v}}{\left\|\dfrac{\partial\sigma}{\partial u}\times\dfrac{\partial\sigma}{\partial v}\right\|}\right)\,dS \\
&= \iint_K F(\cos u, v, \operatorname{sen} u)\cdot(\cos u, 0, \operatorname{sen} u)\,du\,dv \\
&= \int_{-2}^{1}\int_0^{2\pi}(\cos u, v, \operatorname{sen} u)\cdot(\cos u, 0, \operatorname{sen} u)\,du\,dv \\
&= \int_{-2}^{1}\int_0^{2\pi} du\,dv \\
&= \text{Área}(K) \\
&= 6\pi
\end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Um esboço do tetraedro em questão é dado na seguinte figura*



Observe que

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y\right)+\frac{\partial}{\partial y}(xy)+\frac{\partial}{\partial z}(-2xz-y) \\
&= 2x + x - 2x \\
&= x
\end{aligned}$$

Assim, como a fronteira do tetraedro é fechada e o $\operatorname{div}\mathbf{F}$ *existe em todo seu interior, vale o* ***teorema da divergência de Gauss***. *Logo*

$$\begin{aligned}
\tau &= \iint_\sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS \\
&= \iiint_\Omega \operatorname{div}\mathbf{F}\,dx\,dy\,dy
\end{aligned}$$

Sendo Ω o objeto sólido que corresponde ao tetraedro, ou seja

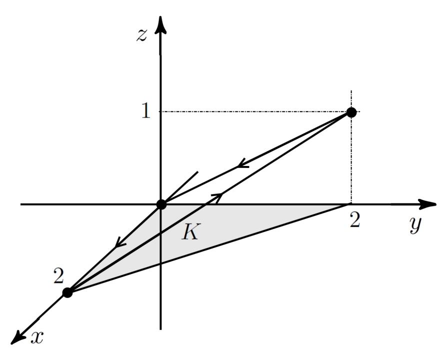
$$\Omega : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1-x \\ 0 \le z \le 1-x-y \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\tau &= \iiint_\Omega \operatorname{div}\mathbf{F}\,dx\,dy\,dz \\
&= \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} x\,dz\,dy\,dx \\
&= \int_0^1\int_0^{1-x} xz\,\Big|_0^{1-x-y}\,dy\,dx \\
&= \int_0^1\int_0^{1-x} x\,(1-x-y)\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 \left(xy - x^2y - \frac{1}{2}y^2x\right)\Big|_0^{1-x}\,dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x\right)dx \\
&= \left(\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2\right)\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{8} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{24}
\end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Um esboço da curva em questão é dado por*



Observe que

$$\text{rot}\,\mathbf{F} = (-4, -6, 6y)$$

e o plano que contém os três pontos que formam o triângulo dado, possui equação

$$z = \frac{y}{2}$$

Assim, uma parametrização da superfície que representa o interior da curva Γ fronteira do triângulo em questão, pode ser dada por

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \dfrac{v}{2} \end{cases}, (u,v) \in K$$

sendo

$$K : \begin{cases} 0 \leq u \leq 2 \\ 0 \leq v \leq 2 - u \end{cases}$$

Disto segue-se que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = (1, 0, 0)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v} = \left(0, 1, \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} = \left(0, -\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\dfrac{\partial \sigma}{\partial u} \times \dfrac{\partial \sigma}{\partial v}}{\left\| \dfrac{\partial \sigma}{\partial u} \times \dfrac{\partial \sigma}{\partial v} \right\|}$$

Como a curva Γ é fechada e o $\text{rot}\,\mathbf{F}$ existe na porção de superfície que representa o interior de Γ, é válido o ***teorema de Stokes****, ou seja*

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{F}\, d\Gamma &= \iint_\sigma \text{rot}\,\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS \\
&= \iint_\sigma \text{rot}\,\mathbf{F}(\sigma(u,v)) \cdot \left(\frac{\dfrac{\partial \sigma}{\partial u} \times \dfrac{\partial \sigma}{\partial v}}{\left\| \dfrac{\partial \sigma}{\partial u} \times \dfrac{\partial \sigma}{\partial v} \right\|} \right) dS \\
&= \iint_\sigma \text{rot}\,\mathbf{F}(u, v, \frac{v}{2}) \cdot \left(\frac{\dfrac{\partial \sigma}{\partial u} \times \dfrac{\partial \sigma}{\partial v}}{\left\| \dfrac{\partial \sigma}{\partial u} \times \dfrac{\partial \sigma}{\partial v} \right\|} \right) dS \\
&= \iint_K (-4, -6, 6v) \cdot \left(0, -\frac{1}{2}, 1\right) du\, dv \\
&= \int_0^2 \int_0^{2-u-} (3 + 6v)\ dv\, du \\
&= \int_0^2 \left(3v + 3v^2\right) \Big|_0^{2-u} du \\
&= 3\int_0^2 \left(6 - 5u + u^2\right) du \\
&= 3\left(6u - \frac{5}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3\right) \Big|_0^2 \\
&= 14
\end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III - Turma M3

Prof^{o}. Edson

Prova Final **1^{o} Semestre** **2018**

Data: Terça-feira, 02 de Outubro **Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Calcule*

$$\iint_{\Omega} e^{x+y} dx\, dy$$

sendo Ω o quadrado de vértices (1,0), (0,1), (-1,0) e (0,-1).

Problema 2 *Calcule o volume do sólido, no primeiro octante, limitado pelos gráficos das superfícies $z = 4 - x^2$ e $y = 4 - x^2$.*

Problema 3 *Calcule*

$$\int_{\gamma} (1 - ye^{-x})dx + e^{-x}dy$$

onde γ é o trecho da curva $y = \sqrt{x} + 1$, do ponto $(0, 1)$ ao ponto $(1, 2)$.

Problema 4 *Calcule*

$$\iint_{\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

onde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -y\, \mathbf{i} + x\, \mathbf{j} - 2\, \mathbf{k}$$

e σ é a região do cone $z^2 = x^2 + y^2$ com $0 \leq z \leq 4$ e vetor normal apontando para baixo.

Problema 5 *Calcule*

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\gamma$$

onde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 z\, \mathbf{i} + xy^2\, \mathbf{j} + z^2\, \mathbf{k}$$

e γ é a interseção do plano $x + y + z = 1$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 9$ com orientação no sentido anti-horário quando visto de cima.

Boa Sorte!

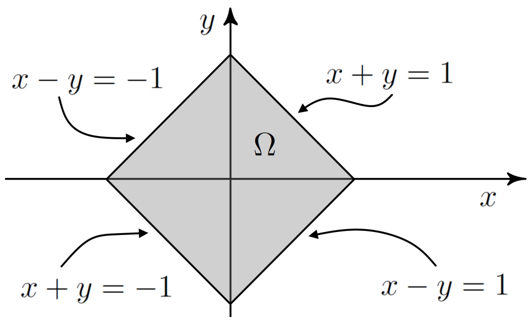
Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^o. Edson

1^o Semestre

Gabarito Prova Final **2018**
Data: Terça-feira, 2 de Outubro **Turma M3**

Exercício 1 *Realizando um esboço do conjunto Ω obtem-se*



Considere a seguinte mudança de variável

$$\varphi^{-1} : \begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$$

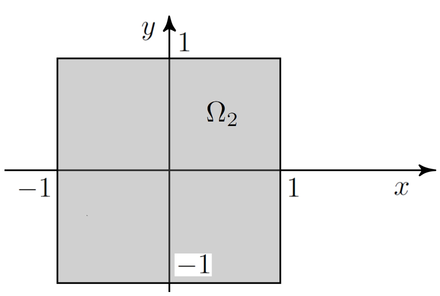
Segue-se desta escolha, que

$$\varphi : \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2} \end{cases}$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{2}$$

Neste referencial o conjunto Ω torna-se



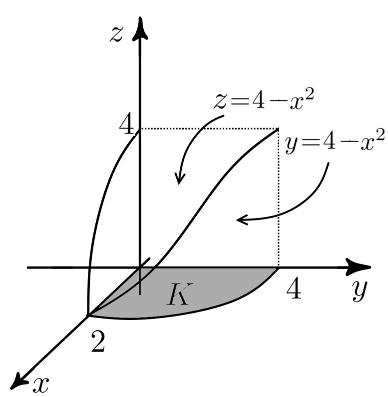
$$\Omega_2 : \begin{cases} -1 \leq u \leq 1 \\ -1 \leq v \leq 1 \end{cases}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \iint_\Omega e^{x+y} dx\, dy &= \iint_{\Omega_2} e^u\, |J|\, du\, dv \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1}{2} e^u du\, dv \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} e^u \Big|_{-1}^{1} dv \\ &= \frac{1}{2}\left(e - e^{-1}\right)\int_{-1}^{1} dv \\ &= \frac{1}{2}\left(e - e^{-1}\right) v \Big|_{-1}^{1} \\ &= e - e^{-1} \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Realizando um esboço do sólido em questão, obtemos a seguinte figura*



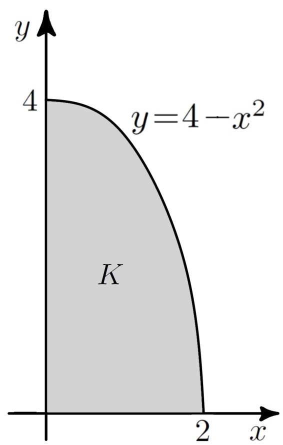
Percebe-se portanto, que tal sólido pode ser expresso como

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq z \leq 4 - x^2 \\ (x, y) \in K \end{cases}$$

Para calcular o volume deste sólido, é preciso resolver *a seguinte integral*

$$\begin{aligned} V &= \iiint_\Omega 1 dx\, dy\, dz \\ &= \iint_K \int_0^{4-x^2} z dz\, dx\, dy \\ &= \iint_K \left(4-x^2\right) dx\, dy \end{aligned}$$

Observe que



$$K : \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 4 - x^2 \end{cases},$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} V &= \iint_K \left(4-x^2\right) dx\, dy \\ &= \int_0^2 \int_0^{4-x^2} \left(4-x^2\right) dy\, dx \\ &= \int_0^2 \left(4-x^2\right) \Big|_0^{4-x^2} dx \\ &= \int_0^2 \left(4-x^2\right)^2 dx \\ &= \int_0^2 \left(16 - 8x^2 + x^4\right) dx \\ &= \frac{256}{15} \end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Observe inicialmente que deseja-se calcular uma integral de linha do campo vetorial*

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(1 - ye^{-x}\right)\mathbf{i} + e^{-x}\mathbf{j}$$

e que

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{F}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(1 - ye^{-x}\right) \\ &= -e^{-x} + e^{-x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Logo, como $D_{\mathbf{F}} = \mathbb{R}^2$, que é simplesmente conexo, a integral em questão é independente do caminho escolhido, importando apenas os pontos de início e fim do caminho, que neste caso são

$$A = (0,1)\; e\, B = (1,2)$$

Escolhendo o segmento de reta que que começa em A e termina em B, cuja parametrização é dada or

$$\gamma_1 : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 1 + t \end{cases} \quad 0 \le t \le 1$$

e considerando

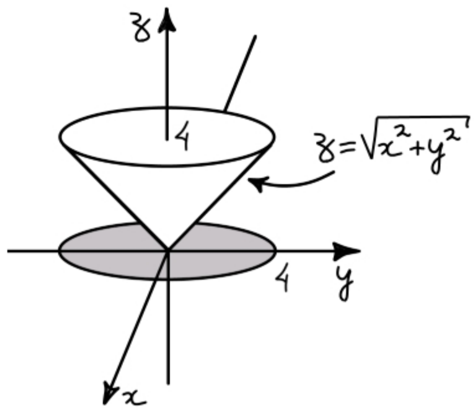
$$I = \int_\gamma \left(1 - ye^{-x}\right) dx + e^{-x} dy$$

Temos que

$$\begin{aligned} I &= \int_{\gamma_1} \left(1 - ye^{-x}\right) dx + e^{-x} dy \\ &= \int_0^1 \left[1 - (1+t)e^{-t}\right] dt + e^{-t} dt \\ &= \int_0^1 \left(1 - e^{-t} - te^{-t} + e^{-t}\right) dt \\ &= \int_0^1 \left(1 - te^{-t}\right) dt \\ &= \left[t + e^{-t}(t+1)\right] \Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{e} \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Realizando um esboço da região em* *questão obtemos a seguinte figura*



Observe que a fronteira desta região é a curva dada pela seguinte parametrização

$$\Gamma : \begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 4\text{sen}\, t \quad ; 0 \le t \le 2\pi \\ z = 4 \end{cases}$$

Assim, usando o ***Teorema de Stokes****, temos que*

$$\iint_\sigma \text{rot}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \oint_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\Gamma$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}\left(4\cos t, 4\text{sen}\, t, 4\right)\cdot(-4\text{sen}\, t, 4\cos t, 0)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-4\text{sen}\, t, 4\cos t, -2)\cdot(-4\text{sen}\, t, 4\cos t, 0)\,dt$$

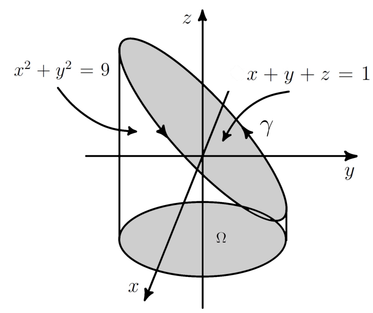
$$= \int_0^{2\pi} \left(16\text{sen}^2 t + 16\cos^2 t\right)dt$$

$$= 16\int_0^{2\pi} dt$$

$$= 32\pi$$

■

Exercício 5 *Realizando um esboço da região em questão obtemos a seguinte figura*



Observe que

$$\text{rot}\,\mathbf{F} = (0, x^2, y^2)$$

e a superfície σ em questão, pode ser parametrizada da seguinte forma

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \qquad ; \underbrace{u^2+v^2 \le 9}_{\Omega} \\ z = 1-u-v \end{cases}$$

Ou seja

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u} = (1,0,-1)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial v} = (0,1,-1)$$

e

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v} = (1,1,1)$$

Logo,

$$n = \frac{(1,1,1)}{\|(1,1,1)\|}$$

Assim, usando o ***Teorema de Stokes****, temos que*

$$\oint_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\Gamma = \iint_\sigma \text{rot}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

$$= \iint_\Omega \text{rot}\,\mathbf{F}\left(\sigma(u,v)\right)\cdot\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}\sqrt{3}du\,dv$$

$$= \iint_\Omega \text{rot}\,\mathbf{F}\left(u,v,1-u-v\right)\cdot(1,1,1)du\,dv$$

$$= \iint_\Omega (0,u^2,v^2)(1,1,1)du\,dv$$

$$= \iint_\Omega \left(u^2+v^2\right)du\,dv$$

Usando coordenadas polares, ou seja

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = r$$

O conjunto Ω*, neste referencial, torna-se*

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq r \leq 3 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

e disto, segue-se que

$$\begin{aligned} \oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\Gamma &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} r^2 r d\theta\, dr \\ &= \int_0^3 r^3\theta\Big|_0^{2\pi} dr \\ &= 2\pi \int_0^3 r^3 dr \\ &= \frac{\pi r^4}{2}\Big|_0^3 \\ &= \frac{81\pi}{2} \end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III - Turma A3

Prof$^{\text{o}}$. Edson

1ª Prova | **2º Semestre** | **2018**

Data: 13 de Dezembro | **Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Calcule a integral iterada*

$$\int_0^1 \int_0^1 |x-y|\, dx\, dy$$

Problema 2 *Calcule*

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y} dy\, dx$$

Problema 3 *Calcule a massa da lâmina delimitada pela interseção dos círculos* $x^2+y^2=9$ *e* $x^2+y^2=6y$ *e cuja densidade no ponto* (x,y) *é o inverso de sua distância à origem.*

Problema 4 *Calcule a integral*

$$\iint_\Omega \left(2x^2-xy-y^2\right) dx\, dy$$

Sendo Ω *a região do plano delimitada pelas retas* $y=-2x+4$, $y=-2x+7$, $y=x-2$ *e* $y=x+1$.

Problema 5 *Encontre o volume do sólido limitado superiormente pela esfera* $x^2+y^2+z^2=2$ *e inferiormente pela superfície* $z=x^2+y^2$.

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof$^{\text{o}}$. Edson

1$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito 1ª Prova **2018**
Data: Segunda-feira, 17 de Dezembro **Turma A3**

Exercício 1 *Inicialmente, observe que*

$$|x-y| = \begin{cases} x-y, \; se \; x-y \geq 0 \\ -(x-y), \; se \; x-y < 0 \end{cases}$$

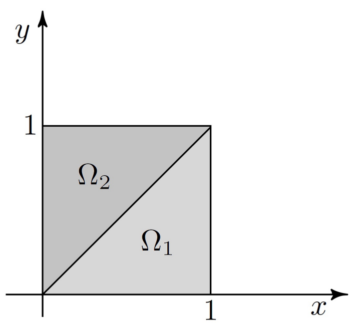
$$= \begin{cases} x-y, \; se \; x \geq y \\ -x+y, \; se \; x < y \end{cases}$$

Além disto, perceba que o domínio de integração é o conjunto

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases},$$

que pode ser expresso como

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$$



sendo

$$\Omega_1 : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x \end{cases}$$

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x \leq y \leq 1 \end{cases}$$

Assim,

$$\int_0^1 \int_0^1 |x-y| \, dx \, dy = \iint_\Omega |x-y| \, dx \, dy$$

$$= \iint_{\Omega_1} |x-y| \, dx \, dy +$$

$$+ \iint_{\Omega_2} |x-y| \, dx \, dy$$

$$\int_0^1 \int_0^1 |x-y| \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^x |x-y| \, dy \, dx +$$

$$+ \int_0^1 \int_x^1 |x-y| \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^x (x-y) dy \, dx +$$

$$+ \int_0^1 \int_x^1 (-x+y) dy \, dx$$

$$= \int_0^1 xy - \frac{1}{2}y^2 \Big|_0^x dx +$$

$$+ \int_0^1 -xy + \frac{1}{2}y^2 \Big|_x^1 dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 dx +$$

$$+ \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \Big|_0^1$$

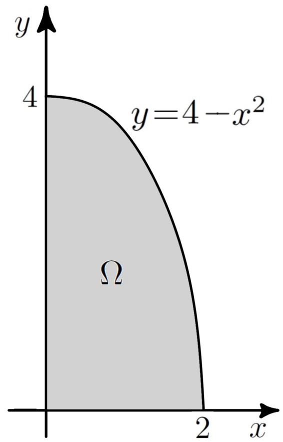
$$= \frac{1}{3}$$

■

Exercício 2 *Observe que o domínio de integração é o conjunto*

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 4 - x^2 \end{cases},$$

cujo esboço é dado na seguinte figura



O conjunto Ω *também pode ser expresso como*

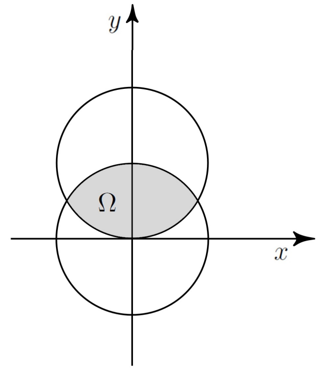
$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt{4-y} \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

Assim, invertendo a ordem de integração, tem-se

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y} dy\, dx &= \iint_\Omega \frac{xe^{2y}}{4-y} dx\, dy \\
&= \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{xe^{2y}}{4-y} dx\, dy \\
&= \int_0^4 \left. \frac{e^{2y}}{4-y} \frac{x^2}{2} \right|_0^{\sqrt{4-y}} dy \\
&= \int_0^4 \frac{e^{2y}}{4-y} \frac{4-y}{2} dy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^4 e^{2y} dy \\
&= \frac{1}{2} \left. \frac{e^{2y}}{2} \right|_0^4 \\
&= \frac{1}{4} \left(e^8 - 1\right)
\end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Realizando um esboço da lâmina em questão obtêm-se*



De acordo como enunciado do problema, a densidade da lâmina é dada por

$$\delta(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Assim, a massa desta lâmina é

$$M(\Omega) = \iint_\Omega \delta(x, y) dx\, dy$$

Usando coordenadas polares,

$$\begin{cases} x = r \cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \end{cases},$$

cujo jacobiano é

$$|J| = r,$$

o conjunto Ω *neste referencial torna-se*

$$\Omega_2 = \Omega_a \cup \Omega_b \cup \Omega_c,$$

sendo

$$\Omega_a : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{6} \\ 0 \leq r \leq 6 \operatorname{sen}\theta \end{cases},$$

$$\Omega_b : \begin{cases} \dfrac{\pi}{6} \leq \theta \leq \dfrac{5\pi}{6} \\ 0 \leq r \leq 3 \end{cases},$$

$$\Omega_c : \begin{cases} \dfrac{5\pi}{6} \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 6 \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

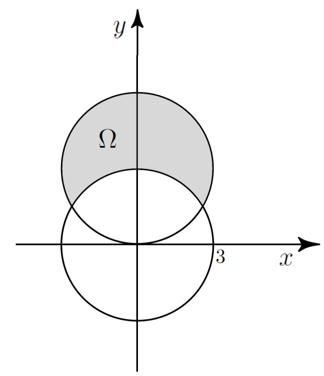
Portanto,

$$\begin{aligned}
M(\Omega) &= \iint_\Omega \delta(x,y)dx\,dy \\
&= \iint_\Omega \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dx\,dy \\
&= \iint_{\Omega_2} \frac{1}{r}\,|J|\,dr\,d\theta \\
&= \iint_{\Omega_2} \frac{1}{r} r dr\,d\theta \\
&= \iint_{\Omega_2} dr\,d\theta \\
&= \iint_{\Omega_a} dr\,d\theta + \iint_{\Omega_b} dr\,d\theta + \iint_{\Omega_c} dr\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{6\operatorname{sen}\theta} dr\,d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\int_0^3 dr\,d\theta + \\
&\quad + \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi}\int_0^{6\operatorname{sen}\theta} dr\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{6}} r\Big|_0^{6\operatorname{sen}\theta} d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} r\Big|_0^3 d\theta + \\
&\quad + \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} r\Big|_0^{6\operatorname{sen}\theta} d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{6}} 6\operatorname{sen}\theta\,d\theta + 3\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} d\theta + \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} 6\operatorname{sen}\theta\,d\theta \\
&= -6\cos\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + 3\theta\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} - 6\cos\theta\Big|_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} \\
&= 12 - 6\sqrt{3} + 2\pi
\end{aligned}$$

■

Observação.: *Conforme pode ser visto na figura anterior exestem três regiões delimitadas pelas circunferências dadas. Infelizmente o enunciado do problema não deixa claro a qual região se refere. Desta forma considerarei válida qualquer uma das escolhas. A seguir a solução para uma região diferente da considerada anteriormente.*

Outra Solução: *Realizando um esboço da lâmina em questão obtêm-se*



De acordo como enunciado do problema, a densidade da lâmina é dada por

$$\delta(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Assim, a massa desta lâmina é

$$M(\Omega) = \iint_\Omega \delta(x,y)dx\,dy$$

Usando coordenadas polares,

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases},$$

cujo jacobiano é

$$|J| = r,$$

o conjunto Ω *neste referencial torna-se*

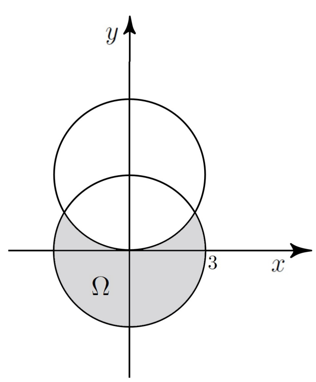
$$\Omega_2 : \begin{cases} \dfrac{\pi}{6} \le \theta \le \dfrac{5\pi}{6} \\ 3 \le r \le 6\operatorname{sen}\theta \end{cases},$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
M(\Omega) &= \iint_{\Omega} \delta(x,y)dx\,dy \\
&= \iint_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dx\,dy \\
&= \iint_{\Omega_2} \frac{1}{r}\,|J|\,dr\,d\theta \\
&= \iint_{\Omega_2} \frac{1}{r} r dr\,d\theta \\
&= \iint_{\Omega_2} dr\,d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \int_{3}^{6\operatorname{sen}\theta} dr\,d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} r\Big|_{3}^{6\operatorname{sen}\theta} d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (6\operatorname{sen}\theta - 3)\,d\theta \\
&= -6\cos\theta - 3\theta\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \\
&= 6\sqrt{3} - 2\pi
\end{aligned}
$$

■

Outra Solução: *Realizando um esboço da lâmina em questão obtêm-se*



De acordo como enunciado do problema, a densidade da lâmina é dada por

$$\delta(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Assim, a massa desta lâmina é

$$M(\Omega) = \iint_{\Omega} \delta(x,y)dx\,dy$$

Usando coordenadas polares,

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases},$$

cujo jacobiano é

$$|J| = r,$$

o conjunto Ω neste referencial torna-se

$$\Omega_2 = \Omega_a \cup \Omega_b \cup \Omega_c,$$

sendo

$$\Omega_a : \begin{cases} -\dfrac{7\pi}{6} \leq \theta \leq -\pi \\ 6\operatorname{sen}\theta \leq r \leq 3 \end{cases},$$

$$\Omega_b : \begin{cases} -\pi \leq \theta \leq 0 \\ 0 \leq r \leq 3 \end{cases},$$

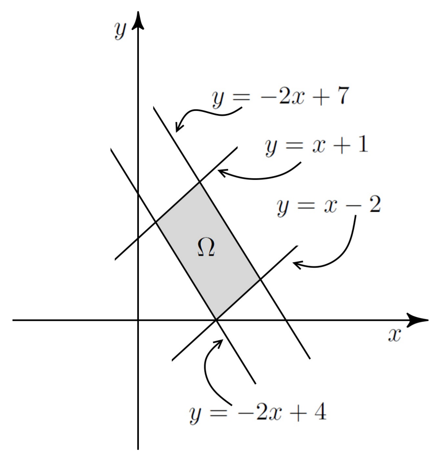
$$\Omega_c : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{6} \\ 6\operatorname{sen}\theta \leq r \leq 3 \end{cases}$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
M(\Omega) &= \iint_\Omega \delta(x,y)dx\,dy \\
&= \iint_\Omega \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dx\,dy \\
&= \iint_{\Omega_2} \frac{1}{r}\,|J|\,dr\,d\theta \\
&= \iint_{\Omega_2} \frac{1}{r} r dr\,d\theta \\
&= \iint_{\Omega_2} dr\,d\theta \\
&= \iint_{\Omega_a} dr\,d\theta + \iint_{\Omega_b} dr\,d\theta + \iint_{\Omega_c} dr\,d\theta \\
&= \int_{-\frac{7\pi}{6}}^{-\pi}\int_{6\operatorname{sen}\theta}^{3} dr\,d\theta + \int_{-\pi}^{0}\int_{0}^{3} dr\,d\theta + \\
&\quad + \int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\int_{6\operatorname{sen}\theta}^{3} dr\,d\theta \\
&= \int_{-\frac{7\pi}{6}}^{-\pi} r\,\Big|_{6\operatorname{sen}\theta}^{3} d\theta + \int_{-\pi}^{0} r\,\Big|_{0}^{3} d\theta + \\
&\quad + \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} r\,\Big|_{6\operatorname{sen}\theta}^{3} d\theta \\
&= \int_{-\frac{7\pi}{6}}^{-\pi} (3-6\operatorname{sen}\theta)\,d\theta + 3\int_{-\pi}^{0} d\theta + \\
&\quad + \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} (3-6\operatorname{sen}\theta)\,d\theta \\
&= 3\theta + 6\cos\theta\,\Big|_{-\frac{7\pi}{6}}^{-\pi} + 3\theta\,\Big|_{-\pi}^{0} + 3\theta + 6\cos\theta\,\Big|_{0}^{\frac{\pi}{6}} \\
&= -12 + 4\pi + 6\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

■

Exercício 4 *Realizando um esboço da região Ω obtêm-se*



Considere a seguinte mudança de variável

$$
\varphi^{-1}: \begin{cases} u = y + 2x \\ v = y - x \end{cases}
$$

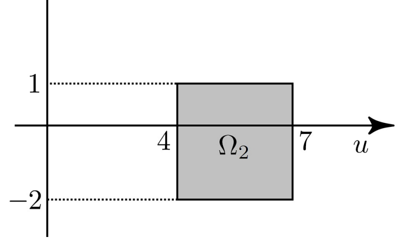
Segue-se desta escolha, que

$$
\varphi: \begin{cases} x = \dfrac{u-v}{3} \\ y = \dfrac{u+2v}{3} \end{cases},
$$

cujo jacobiano é dado por

$$
\begin{aligned}
|J| &= \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \\
&= \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Neste referencial, o cojunto Ω torna-se



$$\Omega : \begin{cases} 4 \leq u \leq 7 \\ -2 \leq v \leq 1 \end{cases}$$

Além disto, observe que

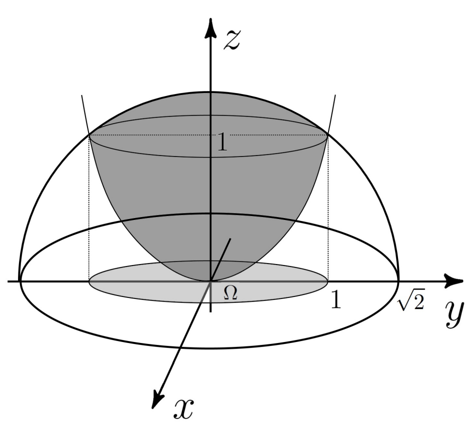
$$\begin{aligned} 2x^2 - xy - y^2 &= 2x^2 - xy + xy - xy - y^2 \\ &= 2x^2 - 2xy + xy - y^2 \\ &= 2x\,(x-y) + y\,(x-y) \\ &= (2x+y)\,(x-y) \\ &= -uv \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \iint_\Omega (2x^2 - xy - y^2)dxdy &= \iint_{\Omega_2} -uv\,du\,dv \\ &= -\int_{-2}^{1}\int_4^7 uv\,du\,dv \\ &= -\int_{-2}^{1} \frac{vu^2}{2}\bigg|_4^7 dv \\ &= -\frac{33}{2}\int_{-2}^{1} vdv \\ &= -\frac{33}{2}\,\frac{v^2}{2}\bigg|_{-2}^{1} \\ &= \frac{99}{4} \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Realizando um esboço do sólido em questão obtêm-se a seguinte figura*



Logo, o volume deste sólido é dado por

$$V = \iint_\Omega \left[\sqrt{2 - x^2 - y^2} - \left(x^2 + y^2\right)\right] dxdy$$

Sendo Ω *o disco*

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

Usando coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,sen\,\theta \end{cases},$$

cujo jacobiano é

$$|J| = r$$

o conjunto Ω*, neste referencial, torna-se*

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Portanto

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\Omega_2} \left(\sqrt{2 - r^2} - r^2\right) |J|\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\left(\sqrt{2 - r^2} - r^2\right) dr\,d\theta \\ &= \frac{\pi}{6}\left(8\sqrt{2} - 7\right) \end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III - Turma A3

Prof^{o}. Edson

2ª Prova **2º Semestre** **2018**

Data: 12 de Fevereiro **Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Calcule*

$$\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{z}}^1 \int_0^{\ln 3} \frac{\pi e^{2x} \operatorname{sen}(\pi y^2)}{y^2} dx\, dy\, dz$$

Problema 2 *Calcule o volume da região no primeiro octante limitada pelos planos coordenados, pelo plano* $x + y = 4$ *e o cilindro* $y^2 + 4z^2 = 16$.

Problema 3 *Calcule*

$$\iiint_\Omega (6 + 4y)\, dx\, dy\, dz$$

Sendo Ω *a região no primeiro octante limitada pelas superfícies* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2+y^2+z^2 = 4$ *e pelos planos coordenados.*

Problema 4 *Calcule a integral*

$$\int_\gamma (x - y)dx + (x + y)dy$$

Sendo γ *a fronteira do triângulo de vértices* $(0, 0)$, $(1, 0)$ *e* $(0, 1)$, *percorrida no sentido antihorário.*

Problema 5 *Um arame de densidade homogênea possui formato (e posição) dado pela equação*

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Determine o momento de inércio deste arame quando girado em torno do eixo z.

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof$^{\text{o}}$. Edson

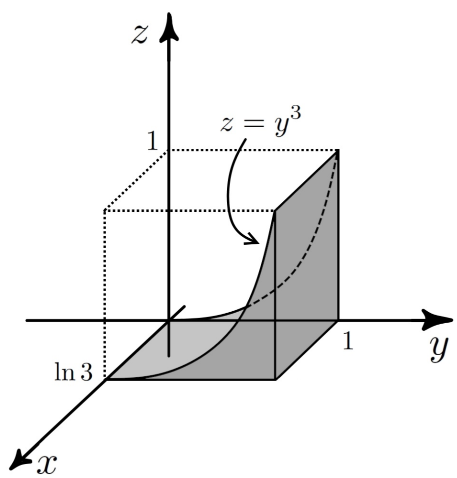
2º Semestre

Gabarito 2ª Prova **2018**
Data: Quarta-feira, 20 de Fevereiro **Turma A3**

Exercício 1 *Observe que o domínio e integração desta integral é o conjunto*

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le x \le \ln 3 \\ \sqrt[3]{z} \le y \le 1 \\ 0 \le z \le 1 \end{cases}$$

Cujo esboço é dado na figura a seguir:



Segue-se portanto que este conjunto pode também ser expresso como

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le x \le \ln 3 \\ 0 \le y \le 1 \\ 0 \le z \le y^3 \end{cases}$$

Assim,

$$A = \int_0^1 \int_{\sqrt[3]{z}}^1 \int_0^{\ln 3} \frac{\pi e^{2x} \operatorname{sen}\left(\pi y^2\right)}{y^2} dx\, dy\, dz$$

$$= \iiint_\Omega \frac{\pi e^{2x} \operatorname{sen}\left(\pi y^2\right)}{y^2} dx\, dy\, dz$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\ln 3} \int_0^{y^3} \frac{\pi e^{2x} \operatorname{sen}\left(\pi y^2\right)}{y^2} dz\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\ln 3} \frac{\pi e^{2x} \operatorname{sen}\left(\pi y^2\right)}{y^2} z \Big|_0^{y^3} dx\, dy$$

$$A = \int_0^1 \int_0^{\ln 3} \frac{\pi e^{2x} \operatorname{sen}\left(\pi y^2\right) y^3}{y^2} dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\ln 3} \pi y \operatorname{sen}\left(\pi y^2\right) e^{2x} dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \pi y \operatorname{sen}\left(\pi y^2\right) \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^{\ln 3} dy$$

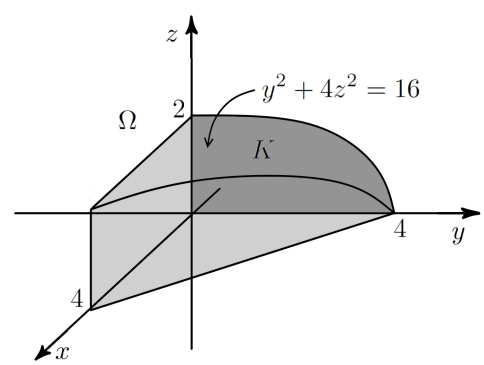
$$= \int_0^1 4\pi y \operatorname{sen}\left(\pi y^2\right) dy$$

$$= -2 \cos\left(\pi y^2\right) \Big|_0^1$$

$$= 4$$

■

Exercício 2 *Realizando um esboço do sólido em questão obtêm-se a seguinte figura:*



Este sólido pode ser expresso como

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le x \le 4 - y \\ (y, z) \in K \end{cases},$$

sendo K a face em destacada na figura. Desta forma, *segue-se que*

$$\begin{aligned}
V(\Omega) &= \iiint_{\Omega} 1\, dx\, dy\, dz \\
&= \iint_{K} \int_{0}^{4-y} dx\, dy\, dz \\
&= \iint_{K} x \Big|_{0}^{4-y} dy\, dz \\
&= \iint_{K} (4-y)\, dy\, dz
\end{aligned}$$

Usando coordenadas polares adaptadas, ou seja

$$\begin{cases} y = r\cos\theta \\ z = \dfrac{1}{2} r \operatorname{sen}\theta \end{cases},$$

cujo jacobiano é

$$|J| = \frac{1}{2} r,$$

O conjunto K neste referencial torna-se

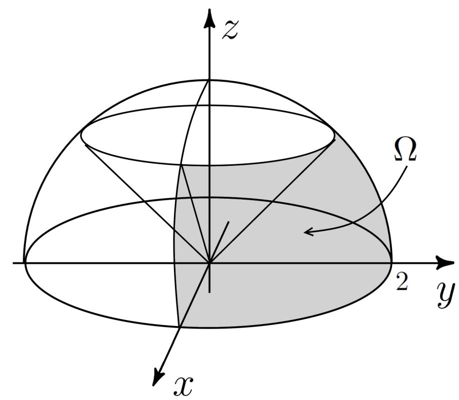
$$K_2 : \begin{cases} 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le 4 \end{cases}$$

Portanto, tem-se que

$$\begin{aligned}
V(\Omega) &= \iint_{K_2} (4 - r\cos\theta)\, |J|\, dr\, d\theta \\
&= \int_{0}^{4} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} r\, (4 - r\cos\theta)\, d\theta\, dr \\
&= \frac{1}{2} \int_{0}^{4} \left(4r\theta - r^2 \operatorname{sen}\theta\right) \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} dr \\
&= \frac{1}{2} \int_{0}^{4} \left(2\pi r - r^2\right) dr \\
&= \frac{1}{2} \left(\pi r^2 - \frac{1}{3} r^3\right) \Big|_{0}^{4} \\
&= 8\pi - \frac{32}{3}
\end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Realizando um esboço do sólido em questão, obtêm-se*



Usando ***coordenadas esféricas****, ou seja*

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases},$$

cujo jacobiano é

$$|J| = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi,$$

o conjunto Ω neste referencial torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le \rho \le 2 \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases},$$

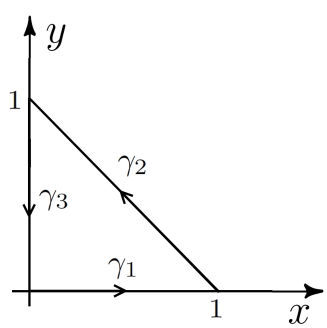
Assim,

$$\begin{aligned}
B &= \iiint_{\Omega} (6 + 4y)\, dx\, dy\, dz \\
&= \iiint_{\Omega_2} (6 + 4\rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta)\, |J|\, d\rho\, d\varphi\, d\theta \\
&= \iiint_{\Omega_2} \left(6\rho^2 \operatorname{sen}\varphi + 4\rho^3 \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}\theta\right) d\rho\, d\varphi\, d\theta \\
&= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{2} \left(6\rho^2 \operatorname{sen}\varphi + 4\rho^3 \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}\theta\right) d\rho\, d\varphi\, d\theta \\
&= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2\rho^3 \operatorname{sen}\varphi + \rho^4 \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}\theta\right) \Big|_{0}^{2} d\varphi\, d\theta \\
&= 16 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}\theta\right) d\varphi\, d\theta \\
&= 16 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left[-\cos\varphi + \frac{1}{2}\left(\varphi - \frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{2}\right) \operatorname{sen}\theta\right] \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta
\end{aligned}$$

$$B = 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\sqrt{2}}{3} + \left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\right)\operatorname{sen}\theta\right] d\theta$$
$$= 8\sqrt{2}\theta - (2\pi+4)\cos\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= 4\sqrt{2}\pi + 2\pi + 4$$

■

Exercício 4 *A curva em questão possui o seguinte esboço*



Uma parametrização possivel para esta curva é dada por

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3,$$

sendo

$$\gamma_1 : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 0 \end{cases} ; 0 \le t \le 1$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x(t) = 1-t \\ y(t) = t \end{cases} ; 0 \le t \le 1$$

$$-\gamma_3 : \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = t \end{cases} ; 0 \le t \le 1$$

Assim, segue-se que

$$B = \int_\gamma (x-y)dx + (x+y)dy$$
$$= \int_{\gamma_1} (x-y)dx + (x+y)dy +$$
$$+ \int_{\gamma_2} (x-y)dx + (x+y)dy +$$
$$+ \int_{\gamma_2} (x-y)dx + (x+y)dy$$
$$= \int_0^1 tdt + \int_0^1 -(1-2t)dt + dt - \int_0^1 tdt$$
$$= \int_0^1 2tdt$$
$$= 1$$

■

Exercício 5 *De acordo com o enunciado do problema, tem-se que a densidade do arame é homogênea, ou seja*

$$\delta(x,y,z) = k,\ k \in \mathbb{R}$$

e este arame está girando em torno do eixo z. Logo

$$d = \sqrt{x^2+y^2}$$

Além disso,o arame possui formato de uma circunferência de equação

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Uma parametrização possível para a curva que representa este arama é dada por

$$\gamma : \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\operatorname{sen} t \quad ; 0 \le t \le 2\pi \\ z = 0 \end{cases}$$

Portanto

$$I = \int_\gamma d^2\delta d\gamma$$
$$= \int_0^{2\pi} a^2 k \left\|\gamma'(t)\right\| dt$$
$$= ka^3 \int_0^{2\pi} dt$$
$$= 2\pi k a^3$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III - Turma A3

Prof$^{\text{o}}$. Edson

Prova Final | **2$^{\text{o}}$ Semestre** | **2018**

Data: 28 de Março | **Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Calcule*

$$\iint_{\Omega} e^{x+y} dx\, dy$$

sendo Ω *o quadrado de vértices (1,0), (0,1), (-1,0) e (0,-1).*

Problema 2 *Calcule*

$$\iiint_{\Omega} 3z\, dx\, dy\, dz$$

onde Ω *é o sólido limitado por* $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$ *e* $x + y + z = 2$.

Problema 3 *Determine a área da parte da superfície* $z = x^2 + y$ *que está acima do triângulo com vértices* $(0, 0), (1, 0)$ *e* $(0, 2)$.

Problema 4 *Calcule o fluxo de* $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ *através da superfície do sólido delimitado pelos planos coordenados e o plano* $2x + 3y + 4z = 12$.

Problema 5 *Calcule*

$$\iint_{\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

onde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} - 2\,\mathbf{k}$$

e σ *é a região do cone* $z^2 = x^2 + y^2$ *com* $0 \leq z \leq 4$ *e vetor normal apontando para baixo.*

Boa Sorte!

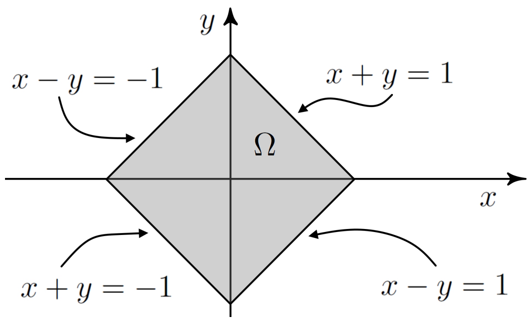
Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^{o}. Edson

2^{o} Semestre

Gabarito Prova Final **2018**
Data: Sexta-feira, 29 de Março **Turma A3**

Exercício 1 *Realizando um esboço do conjunto Ω obtem-se*



Considere a seguinte mudança de variável

$$\varphi^{-1} : \begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$$

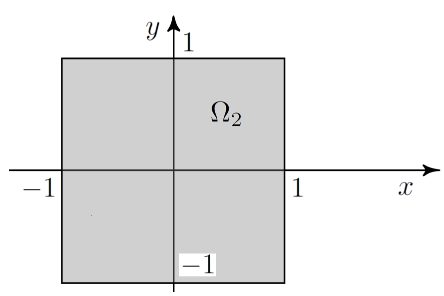
Segue-se desta escolha, que

$$\varphi : \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2} \end{cases}$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{2}$$

Neste referencial o conjunto Ω torna-se



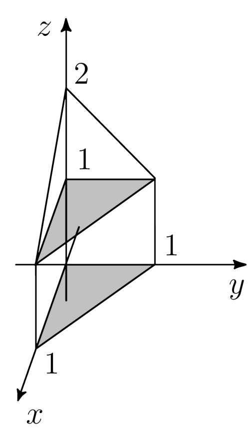
$$\Omega_2 : \begin{cases} -1 \leq u \leq 1 \\ -1 \leq v \leq 1 \end{cases}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} e^{x+y} dx\, dy &= \iint_{\Omega_2} e^{u}\, |J|\, du\, dv \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1}{2} e^{u} du\, dv \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} e^{u} \Big|_{-1}^{1} dv \\ &= \frac{1}{2}\left(e - e^{-1}\right) \int_{-1}^{1} dv \\ &= \frac{1}{2}\left(e - e^{-1}\right) v \Big|_{-1}^{1} \\ &= e - e^{-1} \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Realizando um esboço do sólido em questão, obtemos a seguinte figura*



Observando esta figura podemos deduzir que o sólido Ω pode ser descrito por

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 - x \\ 1 \leq z \leq 2 - x - y \end{cases}$$

Ou seja

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint_\Omega 3z\,dx\,dy\,dz \\
&= \int_0^1\int_0^{1-x}\int_1^{2-x-y} 3z\,dz\,dy\,dx \\
&= \int_0^1\int_0^{1-x} \frac{3}{2}z^2\Big|_1^{2-x-y} dy\,dx \\
&= \frac{3}{2}\int_0^1\int_0^{1-x} \left[(2-x-y)^2-1\right] dy\,dx \\
&= \frac{3}{2}\int_0^1\int_0^{1-x}\left(x^2+2xy-4x+y^2-4y+3\right)dy\,dx \\
&= \frac{3}{2}\int_0^1\left(x^2y+xy^2-4xy+\frac{y^3}{3}-2y^2+3y\right)\Big|_0^{1-x} dx \\
&= \frac{3}{2}\frac{1}{3}\int_0^1\left(-x^3+6x^2-9x+4\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{x^4}{4}+2x^3-\frac{9x^2}{2}+4x\right)\Big|_0^1 \\
&= \frac{5}{8}
\end{aligned}
$$

■

Exercício 3 *Uma parametrização possível para a superfície dada é*

$$
\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2+v \end{cases}, (u,v) \in K
$$

onde K *é a região delimitada pelo triângulo de vértices* $(0,0), (1,0)$ *e* $(0,2)$*, ou seja*

$$
K : \begin{cases} 0 \le u \le 1 \\ 0 \le v \le -2u+2 \end{cases}
$$

Segue-se portanto, que

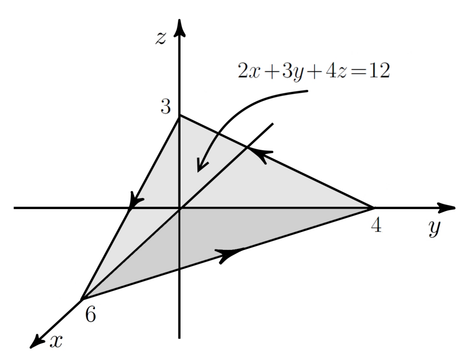
$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) &= (1,0,2u) \\
\frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v) &= (0,1,1) \\
\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v) &= (-2u,-1,1) \\
\left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v)\right\| &= \sqrt{4u^2+2}
\end{aligned}
$$

donde, temos que, a área procurada é dada por

$$
\begin{aligned}
A &= \iint_\sigma ds \\
&= \iint_K \left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v)\right\| du\,dv \\
&= \iint_K \sqrt{4u^2+2}du\,dv \\
&= \int_0^1\int_0^{-2u+2}\sqrt{4u^2+2}dv\,du \\
&= \int_0^1 (-2u+2)\sqrt{4u^2+2}du \\
&= \ln\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\frac{1}{3}\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

■

Exercício 4 *Realizando um esboço do sólido dado, obtemos a seguinte imagem*



Como a fronteira deste sólido compreende uma superfície fechada, é possível aplicar o ***Teorema da***

Divergência de Gauss *para o cálculo do fluxo do campo vetorial*

$$\mathbf{F}(x,y,z) = x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

através desta superfície. Ou seja

$$\iint_\sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds = \iiint_\Omega \operatorname{div}\mathbf{F}dx\,dy\,dz$$
$$= \iiint_\Omega (3x+1)dx\,dy\,dz$$

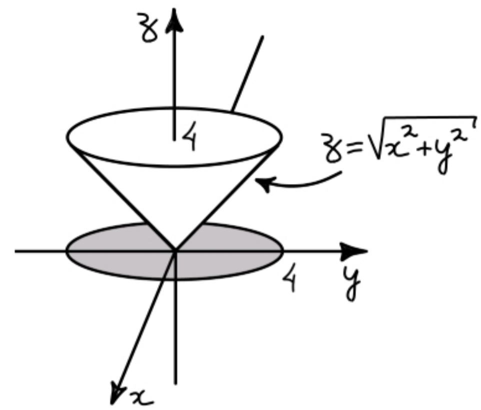
sendo

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le x \le 6 \\ 0 \le y \le \dfrac{12-2x}{3} \\ 0 \le z \le \dfrac{12-2x-3y}{4} \end{cases} ;$$

Portanto,

$$\iint_\sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds = \int_0^6 \int_0^{\frac{12-2x}{3}} \int_0^{\frac{12-2x-3y}{4}} (3x+1)dz\,dy\,dx$$
$$= \int_0^6 \int_0^{\frac{12-2x}{3}} (3x+1)z \Big|_0^{\frac{12-2x-3y}{4}} dy\,dx$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^6 \int_0^{\frac{12-2x}{3}} (3x+1)(12-2x-3y)dy\,dx$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^6 \int_0^{\frac{12-2x}{3}} (12+34x-3y-9xy-6x^2)dydx$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^6 \bigg(12y+34xy-\frac{3}{2}y^2-\frac{9}{2}xy^2-$$
$$-6x^2y\bigg)\Big|_0^{\frac{12-2x}{3}} dx$$
$$= \frac{1}{6}\int_0^6 \left(3x^3-35x^2+96x+36\right)dx$$
$$= \frac{1}{6}\left(\frac{3}{4}x^4-\frac{35}{3}x^3+48x^2+36x\right)\Big|_0^6$$
$$= 66 \qquad \blacksquare$$

Exercício 5 *Realizando um esboço da região em questão obtemos a seguinte figura*



Observe que a fronteira desta região é a curva dada pela seguinte parametrização

$$\Gamma : \begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 4\operatorname{sen} t \quad ; 0 \le t \le 2\pi \\ z = 4 \end{cases}$$

Assim, usando o ***Teorema de Stokes****, temos que*

$$\iint_\sigma \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \oint_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\Gamma$$
$$= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}\left(4\cos t, 4\operatorname{sen} t, 4\right)\cdot\left(-4\operatorname{sen} t, 4\cos t, 0\right)dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(-4\operatorname{sen} t, 4\cos t, -2\right)\cdot\left(-4\operatorname{sen} t, 4\cos t, 0\right)dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(16\operatorname{sen}^2 t + 16\cos^2 t\right)dt$$
$$= 16\int_0^{2\pi} dt$$
$$= 32\pi$$

$\blacksquare$

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III - Turma E3

Prof$^{\text{o}}$. Edson

1ª Prova | **2º Semestre** | **2020**

Data: 31 de Agosto de 2021 | **Duração: 10:00 - 12:00**

Problema 1 *Calcule a integral iterada*

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dy\,dx}{y^4+1}$$

Problema 2 *Calcule a integral*

$$\iint_\Omega y^3\,(2x-y)\,e^{(2x-y)^2}dx\,dy$$

sendo Ω *o quadrilátero de vértices* $(0,0),(2,0),(3,2)$ *e* $(1,2)$.

Problema 3 *Resolva a integral iterada*

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2}dy\,dx$$

Problema 4 *Calcule o volume da região abaixo do gráfico de* $z = x^2+y^2$ *e acima do triângulo delimitado pelas retas* $y = x$, $x = 0$ *e* $x+y=2$.

Problema 5 *Calcule a massa da lâmina cuja região está* ***entre*** *as curvas* $y = \sqrt{1-x^2}$ *e* $y = \sqrt{4-x^2}$ *e* ***acima*** *do eixo* x, *tendo densidade no ponto* (x,y) *proporcional à sua distância à origem.*

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof$^{\text{o}}$. Edson

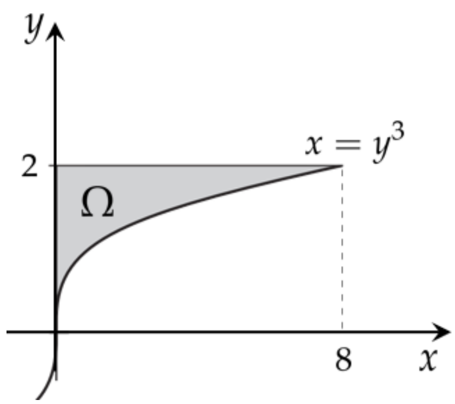
2$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito 1ª Prova **2020**
Data: Terça-feira, 07 de Setembro de 2021 **Turma E3**

Exercício 1 *Inicialmente, observe que o domínio de integração pode ser expresso por*

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ \sqrt[3]{x} \leq y \leq 8 \end{cases},$$

Realizando um esboço desse conjunto obtém-se a seguinte figura



Ou seja, o conjunto Ω também pode ser expresso como

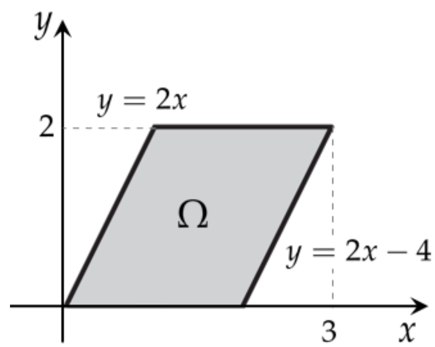
$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq y^3 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dy\,dx}{y^4+1} &= \int_0^2 \int_0^{y^3} \frac{dx\,dy}{y^4+1} \\ &= \int_0^2 \frac{x}{y^4+1}\Bigg|_0^{y^3} dy \\ &= \int_0^2 \frac{y^3}{y^4+1} dy \\ &= \frac{1}{4}\ln\left(y^4+1\right)\Bigg|_0^2 \\ &= \frac{\ln 17}{4} \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Realizando um esboço do domínio de integração, tem-se a seguinte figura*



Considere a seguinte mudança de variáveis

$$\varphi^{-1} : \begin{cases} u = 2x - y \\ v = y \end{cases},$$

e observe que

$$\varphi : \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = v \end{cases}$$

cujo jacobiano é dado por,

$$|\mathrm{J}| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

e, neste referencial o conjunto Ω torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq u \leq 4 \\ 0 \leq v \leq 2 \end{cases}$$

Donde segue-se que,

$$\begin{aligned} \iint_\Omega y^3\,(2x-y)\,e^{(2x-y)^2} dx\,dy &= \iint_{\Omega_2} v^3 u e^{u^2}\,|J|\,du\,dv \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 \int_0^4 v^3 u e^{u^2} du\,dv \\ &= \frac{1}{4}\int_0^2 v^3 e^{u^2}\Bigg|_0^4 dv \end{aligned}$$

$$\iint_{\Omega} y^3\,(2x-y)\,e^{(2x-y)^2}dx\,dy = \frac{1}{4}\left(e^{16}-1\right)\int_0^2 v^3 dv$$
$$= \frac{1}{4}\left(e^{16}-1\right)\,\frac{v^4}{4}\Big|_0^2$$
$$= e^{16}-1$$

■

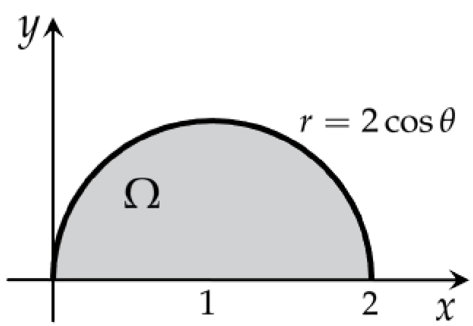
Exercício 3 *Deseja calcular*

$$A = \int_0^2\int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2}dy\,dx$$

O domínio de integração da integral em questão é dado por

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le y \le \sqrt{1-(x-1)^2} \\ 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

cujo esboço é dado pela seguinte figura



Usando coordenadas polares, ou seja

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases},$$

cujo jacobiano é

$$|J| = r,$$

o conjunto Ω *neste referencial torna-se*

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le r \le 2\cos\theta \end{cases},$$

Portanto,

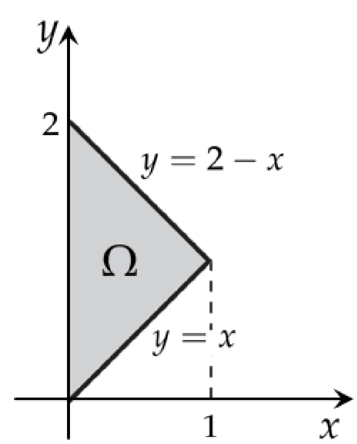
$$A = \iint_{\Omega_2} \frac{r\cos\theta + r\,\mathrm{sen}\,\theta}{r^2}\,|J|\,dr\,d\theta$$
$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\cos\theta} \frac{r^2\,(\cos\theta+\mathrm{sen}\,\theta)}{r^2}dr\,d\theta$$
$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\cos\theta} (\cos\theta+\mathrm{sen}\,\theta)\,dr\,d\theta$$
$$= \int_0^{\pi} (\cos\theta+\mathrm{sen}\,\theta)\,r\Big|_0^{2\cos\theta} d\theta$$
$$= \int_0^{\pi} 2\cos\theta\,(\cos\theta+\mathrm{sen}\,\theta)\,d\theta$$
$$= 2\int_0^{\pi}\left(\cos^2\theta+\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\right)d\theta$$
$$= 2\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}+\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\right)d\theta$$
$$= 2\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\mathrm{sen}\,2\theta}{4}-\frac{\cos^2\theta}{2}\right)\Big|_0^{\pi}$$
$$= \pi$$

■

Exercício 4 *O volume que se deseja encontrar é dado por*

$$V = \iint_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)dx\,dy$$

Onde a região Ω *é esboçada na figura abaixo*



e pode ser expresso como

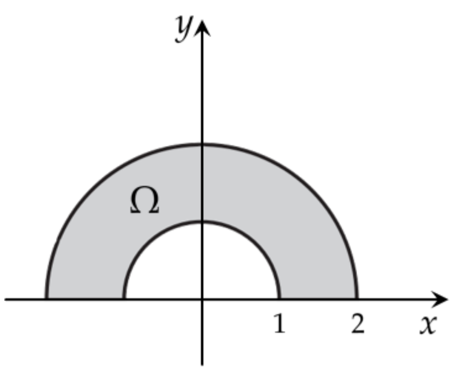
$$\Omega : \begin{cases} x \le y \le 2-x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases},$$

Ou seja,

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^1 \int_x^{2-x} \left(x^2+y^2\right) dy\, dx \\
&= \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{1}{3}y^3\right) \Big|_x^{2-x} \\
&= \int_0^1 \left(-\frac{8}{3}x^3 + 4x^2 - 4x + \frac{8}{3}\right) dx \\
&= \left(-\frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{8}{3}x\right) \Big|_0^1 \\
&= -\frac{2}{3} + \frac{4}{3} - 2 + \frac{8}{3} \\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

■

Exercício 5 *Realizando um esboço da lâmina em questão obtêm-se a seguinte figura*



Usando coordenadas polares, ou seja

$$
\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,sen\,\theta \end{cases},
$$

cujo jacobiano é

$$|J| = r$$

o conjunto Ω*, neste referencial, torna-se*

$$
\Omega_2 : \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}
$$

E a massa desta lâmina, cuja densidade é dada por

$$\delta(x,y) = k\sqrt{x^2+y^2},\ k \in \mathbb{R}$$

será, portanto

$$
\begin{aligned}
M(\Omega) &= \iint_\Omega \delta(x,y) dx\, dy \\
&= \iint_{\Omega_2} kr\, |J|\, dr\, d\theta \\
&= k\int_1^2 \int_0^\pi r^2 d\theta\, dr \\
&= \frac{7k\pi}{3}
\end{aligned}
$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III - Turma E3

Prof^{o}. Edson

2^{a} Prova **2^{o} Semestre** **2020**

Data: 21 de Outubro de 2021 **Duração: 10:00 - 12:00**

Problema 1 *Calcule a integral*

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} e^{-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,dz\,dy\,dx$$

Problema 2 *Encontre o volume do sólido situado acima do cone* $z^2 = x^2 + y^2$ *e interior à esfera* $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$.

Problema 3 *Um sólido é delimitado pelo cone* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ *e pelo plano* $z = 4$, *e a densidade no ponto* (x, y, z) *é diretamente proporcional à distância ao eixo z. Determine o momento de inércia em relação ao eixo z.*

Problema 4 *Calcule a integral*

$$\int_{-\gamma} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

sendo γ *o círculo* $x^2 + y^2 = a^2$ *percorrido no sentido sentido anti-horário.*

Problema 5 *Calcule a integral de linha*

$$\int_{\gamma} xy^4 ds$$

onde γ *é a metade direita do círculo* $x^2 + y^2 = 16$.

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^o. Edson

2^o Semestre

Gabarito 2ª Prova **2020**
Data: Quarta-feira, 27 de Outubro de 2021 **Turma E3**

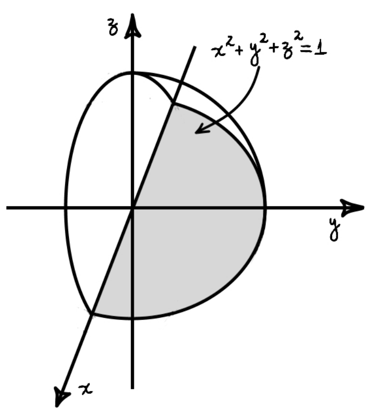
Exercício 1 *Desejamos calcular a integral*

$$A = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} e^{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\, dz\, dy\, dx$$

Observe que, neste caso, o domínio de integração é o conjunto

$$\Omega : \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \\ 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2} \end{cases}$$

cujo esboço é dado na figura abaixo



Assim, usando coordenadas esféricas,

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\ z = \rho \cos \theta \end{cases}$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} \right| = \rho^2 \operatorname{sen} \varphi$$

O conjunto Ω *torna-se*

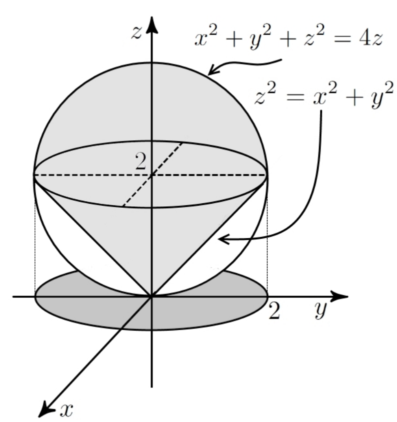
$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} A &= \iiint_{\Omega_2} e^{-\left(\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}\, |J|\, d\rho\, d\varphi\, d\theta \\ &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} e^{-\rho^3} \rho^2 \operatorname{sen} \varphi d\theta\, d\varphi\, d\rho \\ &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho^3} \rho^2 \operatorname{sen} \varphi\, \theta \Big|_0^{\pi} d\varphi\, d\rho \\ &= \pi \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho^3} \rho^2 \operatorname{sen} \varphi\, d\varphi\, d\rho \\ &= -\pi \int_0^1 e^{-\rho^3} \rho^2 \cos\ \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\rho \\ &= \pi \int_0^1 e^{-\rho^3} \rho^2 d\rho \\ &= -\frac{\pi}{3} e^{-\rho^3} \Big|_0^1 \\ &= \frac{\pi}{3}\left(1 - \frac{1}{e}\right) \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Realizando um esboço do sólido em questão obtem-se a seguinte figura:*



Ou seja, este sólido pode expresso da seguinte forma

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2 + \sqrt{4-x^2-y^2} \\ x^2+y^2 \leq 4 \end{cases}$$

Usando coordenadas cilíndricas,

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases},$$

cujo jacobiano é

$$|J| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = r$$

o conjunto Ω neste referencial torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ r \le z \le 2 + \sqrt{4 - r^2} \end{cases}$$

Portanto, o volume deste sólido é dado por

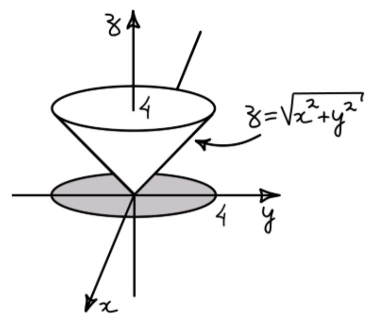
$$\begin{aligned} V &= \iiint_\Omega dx\,dy\,dz \\ &= \iiint_{\Omega_2} |J|\,dr\,d\theta\,dz \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_r^{2+\sqrt{4-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 rz\Big|_r^{2+\sqrt{4-r^2}} dr\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 r\left(2+\sqrt{4-r^2}-r\right) dr\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(2r + r\sqrt{4-r^2} - r^2\right) dr\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(r^2 - \frac{\sqrt{(4-r^2)^3}}{3} - \frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 d\theta \\ &= 4\int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 8\pi \end{aligned}$$

(Outro modo:) *Observe que o sólido consiste da composição de uma meia esfera de raio 2 e um cone de base circular de raio 2 e altura 2. Ou seja, o volume deste sólido pode ser obtido da seguinte maneira*

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}\mathrm{Vol}(\textit{esfera}) + \mathrm{Vol}(\textit{cone}) \\ &= \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi\cdot 2^3 + \frac{1}{3}\pi\cdot 2^2\cdot 2 \\ &= \frac{24\pi}{3} \\ &= 8\pi \end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Um esboço possível para o sólido em questão é dado na figura abaixo*



Usando coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$|J| = \rho$$

o conjunto Ω torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \rho \le 4 \\ r \le z \le 4 \end{cases}$$

A distância de um ponto qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ao eixo z, é dada por

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

e, como a densidade neste mesmo ponto é proporcional à distância ao eixo z, segue-se que

$$\delta(x, y, z) = kd = k\sqrt{x^2 + y^2}$$

onde $k \in \mathbb{R}$. Assim, o momento de inércia procurado será *então*

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_\Omega d^2 \delta dx\, dy\, dz \\
&= \iiint_\Omega k\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2} dx\, dy\, dz \\
&= k\iiint_\Omega \left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}} dx\, dy\, dz \\
&= k\iiint_{\Omega_2} (\rho^2)^{\frac{3}{2}} |J|\, d\rho\, d\theta\, dz \\
&= k\int_0^4\int_0^{2\pi}\int_\rho^4 \rho^3\rho\, dz\, d\theta\, d\rho \\
&= k\int_0^4\int_0^{2\pi} \rho^4\left(4-\rho\right) d\theta\, d\rho \\
&= 2k\pi\int_0^4 \left(4\rho^4-\rho^5\right) d\rho \\
&= \frac{4096}{15}k\pi
\end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Uma parametrização possível para a curva γ é dada por*

$$\gamma : \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a \operatorname{sen} t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{-\gamma} \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} &= -\int_\gamma \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} \\
&= -\int_0^{2\pi} \frac{a^2\cos^2 t + a^2 \operatorname{sen}^2 t}{a^2} dt \\
&= -\int_0^{2\pi} dt \\
&= -2\pi
\end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Sendo γ a metade direita do círculo*

$$x^2+y^2 = 16,$$

podemos parametrizar a curva γ da seguinte forma

$$\begin{cases} x(t) = 4\cos t \\ y(t) = 4 \operatorname{sen} t \end{cases}, \quad -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$$

De onde segue-se que

$$\begin{aligned}
ds &= \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \\
&= \sqrt{16\cos^2 t + 16 \operatorname{sen}^2 t} dt \\
&= 4dt
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma xy^4 ds &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos t(4\operatorname{sen} t)^4 4dt \\
&= 4^6\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \operatorname{sen}^4 t dt
\end{aligned}$$

Tome

$$u = \operatorname{sen} t$$

e observe que

$$\begin{aligned}
du &= \cos t\, dt \\
t = -\tfrac{\pi}{2} &\Rightarrow u = -1 \\
t = \tfrac{\pi}{2} &\Rightarrow u = 1
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
\int_\gamma xy^4 ds &= 4^6\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \operatorname{sen}^4 t dt \\
&= 4^6\int_{-1}^{1} u^4 du \\
&= \left.\frac{4^6}{5}u^5\right|_{-1}^{1} \\
&= \frac{2\cdot 4^6}{5}
\end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III - Turma E3

Prof^{o}. Edson

3ª Prova **2º Semestre** **2020**

Data: 28 de Outubro de 2021 **Duração: 10:00 - 12:00**

Problema 1 *Considere* $F(x,y) = xy^2\mathbf{i} + x^2y\,\mathbf{j}$ *e* $\gamma(t) = \left(t + \operatorname{sen}\frac{\pi t}{2}, t + \cos\frac{\pi t}{2}\right)$ *, com* $0 \leq t \leq 1$. *Calcule*

$$\int_\gamma F \cdot d\gamma$$

Problema 2 *Calcule a integral de linha*

$$\int_\gamma xe^{-2x}dx + \left(x^4 + x^2y^2\right) dy$$

onde γ *é a* ***fronteira*** *da região entre os círculos* $x^2 + y^2 = 1$ *e* $x^2 + y^2 = 4$.

Problema 3 *Calcule a área da parte do parabolóide* $z = x^2 + y^2$ *que está dentro do cilindro* $x^2 + y^2 = 9$.

Problema 4 *Calcule o* ***fluxo*** *do campo vetorial* $F(x,y,z) = y\mathbf{i}+x\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ *através da superfície fechada que corresponde à fronteira do sólido delimitado pelo parabolóide* $z = 1 - x^2 - y^2$ *e o plano* $z = 0$.

Problema 5 *Calcule*

$$\iint_\sigma x^2z^2\, ds$$

sendo σ *a região do cone* $z^2 = x^2 + y^2$ *que está entre os planos* $z = 1$ *e* $z = 3$.

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof$^{\text{o}}$. Edson

2$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito 3ª Prova **2020**
Data: Sexta-feira, 29 de Outubro de 2021 **Turma E3**

Exercício 1 *Observe que*

$$\text{Rot}\, F(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2y\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(xy^2\right)$$

$$= 2xy - 2xy$$

$$= 0$$

e

$$D_F = \mathbb{R}^2$$

Ou seja, F é um ***campo conservativo*** *e portanto, as integrais de linha sobre o campo F* ***não dependem do caminho*** *escolhido, dependem apenas dos pontos inicial e final da curva, que neste caso são*

$$\gamma(0) = (0,1)$$
$$\gamma(1) = (2,1)$$

Considere o caminho alternativo, cuja paramentrização é dada por

$$\gamma_1 : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 1 \end{cases}; \quad 0 \le t \le 2$$

Assim,

$$\int_\gamma F \cdot d\gamma = \int_{\gamma_1} F \cdot d\gamma_2$$

$$= \int_0^2 F\left(\gamma_1(t)\right) \cdot \gamma_1'(t)dt$$

$$= \int_0^2 \left(t, t^2\right) \cdot (1,0)\, dt$$

$$= \int_0^2 t\, dt$$

$$= 2$$

■

Exercício 2 *Considere*

$$A = \int_\gamma xe^{-2x}dx + \left(x^4 + x^2y^2\right) dy$$

Usando o ***teorema de Green***, *tem-se que*

$$A = \iint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(x^4 + x^2y^2\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(xe^{-2x}\right)\right] dx\, dy$$

sendo

$$\Omega : 1 \le x^2 + y^2 \le 4$$

Ou seja

$$A = \iint_\Omega \left(4x^3 + 2xy^2\right) dx\, dy$$

Usando ***coordenadas polares***, *ou seja*

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}; \quad \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = r$$

o conjunto Ω, neste referencial torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 1 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

Portanto,

$$A = \int_0^{2\pi}\int_1^2 \left(4r^3\cos^3\theta + 2r^3\cos\theta\,\text{sen}\,\theta\right) r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_1^2 \left(4r^4\cos^3\theta + 2r^4\cos\theta\,\text{sen}\,\theta\right) dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{4}{5}r^5\cos^3\theta + \frac{2}{5}r^5\cos\theta\,\text{sen}\,\theta\right)\Bigg|_1^2 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{124}{5}\cos^3\theta + \frac{62}{5}\cos\theta\,\text{sen}\,\theta\right) d\theta$$

$$= 0$$

■

Exercício 3 *Uma parametrização possível para a superfície em questão, é dada por*

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + v^2 \end{cases}; \quad \underbrace{0 \le u^2 + v^2 \le 9}_{\Omega}$$

Donde segue-se que

$$\|\sigma_u \times \sigma_v\| = \sqrt{4\left(u^2 + v^2\right) + 1}$$

e

$$\begin{aligned} A(\sigma) &= \iint_\sigma ds \\ &= \iint_\Omega \|\sigma_u \times \sigma_v\|\, du\, dv \\ &= \iint_\Omega \sqrt{4\left(u^2+v^2\right)+1}\, du\, dv \end{aligned}$$

Usando ***coordenadas polares****, ou seja*

$$\begin{cases} u = r\cos\theta \\ v = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}; \quad \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,\theta)}\right| = r$$

o conjunto Ω, neste referencial torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \le r \le 3 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} A(\sigma) &= \int_0^{2\pi}\int_0^3 r\sqrt{4r^2+1}\, dr\, d\theta \\ &= \frac{\pi}{6}\left(37\sqrt{37}-1\right) \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *A superfície em questão pode ser expressa com*

$$\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$$

com

$$\sigma_1 : \begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\,\mathrm{sen}\,v \\ z = 1-u^2 \end{cases}; \quad \Omega_1 : \begin{cases} 0 \le u \le 1 \\ 0 \le v \le 2\pi \end{cases}$$

e

$$\sigma_2 : \begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\,\mathrm{sen}\,v \\ z = 0 \end{cases}; \quad \Omega_2 : \begin{cases} 0 \le u \le 1 \\ 0 \le v \le 2\pi \end{cases}$$

Donde segue-se, que

$$\sigma_{1u} \times \sigma_{1v} = \left(2u^2\cos v, 2u^2\mathrm{sen}\,v, u\right)$$

$$\sigma_{2u} \times \sigma_{2v} = (0,0,u)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \iint_\sigma F\cdot n\, ds &= \iint_{\sigma_1} F\cdot\mathbf{n}\, ds + \iint_{\sigma_2} F\cdot\mathbf{n}\, ds \\ &= \iint_{\Omega_1}\left(u^3\left(4\,\mathrm{sen}\,v\cos v - 1\right)+u\right) du\, dv + \\ &+ \iint_{\Omega_2} 0\, du\, dv \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(u^3\left(4\,\mathrm{sen}\,v\cos v - 1\right)+u\right) du\, dv \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

□

Outro modo: *Usando o* ***teorema da divergência de Gauss****, tem-se que*

$$\iint_\sigma F\cdot n\, ds = \iiint_{\Omega_3} \mathrm{div}\, F\, dx\, dy\, dz$$

onde Ω_3 é o interior da superfície σ ou seja

$$\Omega_3 : \begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \\ 0 \le z \le 1-x^2-y^2 \end{cases}$$

Usando ***coordenadas cilíndricas****, ou seja*

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}; \quad \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| = r$$

o conjunto Ω_3 neste referencial, torna-se

$$\Omega_4 : \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le z \le 1-r^2 \end{cases}$$

e disto segue-se que,

$$\begin{aligned} \iint_\sigma F\cdot n\, ds &= \iiint_{\Omega_3} \mathrm{div}\, F dx\, dy\, dz \\ &= \iiint_{\Omega_3} 1\, dx\, dy\, dz \\ &= \iiint_{\Omega_4} r\, dr\, d\theta\, dz \\ &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{1-r^2} r dz\, d\theta\, dr \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Uma parametrização possível para a superfície em questão, é dada por*

$$\sigma : \begin{cases} x = u\cos v \\ y = u \,\mathrm{sen}\, v \\ z = u \end{cases}$$

com

$$\Omega : \begin{cases} 1 \leq u \leq 3 \\ 0 \leq v \leq 2\pi \end{cases}$$

Donde segue-se que

$$\|\sigma_u \times \sigma_v\| = \sqrt{2}u$$

e

$$\begin{aligned} \iint_\sigma x^2 z^2 ds &= \iint_\Omega u^2 \cos^2 v \, u^2 \, \|\sigma_u \times \sigma_v\| \, du \, dv \\ &= \iint_\Omega \sqrt{2} u^5 \cos^2 v \, du \, dv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_1^3 \sqrt{2} u^5 \cos^2 v \, du \, dv \\ &= \frac{364}{3}\sqrt{2}\pi \end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III - Turma E3

Profº. Edson

Prova Final **2º Semestre** **2020**

Data: 02 de Novembro de 2021 **Duração: 16:00 - 18:15**

Problema 1 *Calcule*

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \sqrt{x^3+1}\,dx\,dy$$

Problema 2 *Calcule a integral*

$$\iiint_\Omega xz\,dx\,dy\,dz$$

*sendo Ω a região do espaço localizada no **primeiro octante**, **acima** do cilindro parabólico $z = y^2$ e abaixo do parabolóide $z = 8 - 2x^2 - y^2$.*

Problema 3 *Calcule a **massa** do cilindro de raio 2 e altura 4 sendo a sua **densidade** dada por e^{-z} onde z é a distância do ponto à base do cilindro (**sugestão:** considere o cilindro com a base no plano xy, orientado na direção do eixo z).*

Problema 4 *Considere $F(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \dfrac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j}$ e γ a fronteira do quadrado de vértices $(1,1), (1,-1), (-1,-1)$ e $(-1,1)$ percorrida no sentido antihorário. Calcule*

$$\int_\gamma F \cdot d\gamma$$

Problema 5 *Seja σ a região da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ que está entre os planos $z = \sqrt{5}$ e $z = \sqrt{8}$. Calcule*

$$\iint_\sigma z^{-1} ds$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^o. Edson

2^o Semestre

Gabarito Prova Final **2020**
Data: Terça-feira, 09 de Novembro de 2021 **Turma E3**

Exercício 1 *Observe que o domínio de integração é o conjunto*

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le y \le 4 \\ \sqrt{y} \le x \le 2 \end{cases}$$

Este conjunto pode também, ser expresso como

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le x^2 \end{cases}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \sqrt{x^3+1}\,dx\,dy &= \iint_\Omega \sqrt{x^3+1}\,dx\,dy \\ &= \int_0^2 \int_0^{x^2} \sqrt{x^3+1}\,dy\,dx \\ &= \frac{52}{9} \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Exercício 2 *O conjunto Ω pode ser descrito como*

$$\Omega : \begin{cases} y^2 \le z \le 8 - 2x^2 - y^2 \\ \underbrace{0 \le 2x^2 + y^2 \le 8}_{\Omega_2} \end{cases}$$

*Usando **coordenadas cilíndricas adptadas**, ou seja*

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases} ; \quad \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

conjunto Ω, torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \le r \le \sqrt{8} \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ r^2\mathrm{sen}^2\theta \le z \le 8 - r^2 \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} I &= \iiint_\Omega xz\,dx\,dy\,dz \\ &= \int_0^{\sqrt{8}} \int_0^{2\pi} \int_{r^2\mathrm{sen}^2\theta}^{8-r^2} \frac{z}{\sqrt{2}} r\cos\theta \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| dz\,d\theta\,dr \\ &= \int_0^{\sqrt{8}} \int_0^{2\pi} \int_{r^2\mathrm{sen}^2\theta}^{8-r^2} \frac{z}{\sqrt{2}} r\cos\theta\, \frac{r}{\sqrt{2}} dz\,d\theta\,dr \\ &= \int_0^{\sqrt{8}} \int_0^{2\pi} \int_{r^2\mathrm{sen}^2\theta}^{8-r^2} \frac{z}{2} r^2\cos\theta\,dz\,d\theta\,dr \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Exercício 3 *Usando **coordenadas cilíndricas**, ou seja*

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases} ; \quad \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| = r$$

conjunto Ω, neste referencial, torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le z \le 4 \end{cases}$$

Além disso, é dado no enunciado do problema que

$$\delta(x,y,z) = e^{-z}$$

Assim,

$$\begin{aligned} M &= \iiint_\Omega \delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \\ &= \iiint_\Omega e^{-z}\,dx\,dy\,dz \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^4 e^{-z} r\,dz\,d\theta\,dr \\ &= 4\pi\left(1 - \frac{1}{e^4}\right) \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Exercício 4 *Considere a curva*

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases} ; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

que está no interior da curva γ que corresponde à fronteira do quadrado dado na questão e está orientada no sentido anti horário. Segue-se do ***teorema de Green****, quee*

$$\begin{aligned} \int_\gamma F \cdot d\gamma &= \int_{\gamma_1} F \cdot d\gamma_1 \\ &= \int_0^{2\pi} F(\gamma_1(t)) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} F(\cos t, \operatorname{sen} t) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen} t, \cos t) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Exercício 5 *Uma parametrização possível para a superfície em questão, é dada por*

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{9 - u^2 - v^2} \end{cases} ; \quad \underbrace{1 \leq u^2 + v^2 \leq 2}_{\Omega}$$

Donde segue-se que

$$\|\sigma_u \times \sigma_v\| = \frac{3}{\sqrt{9 - u^2 - v^2}}$$

e

$$\begin{aligned} \iint_\sigma z^{-1} ds &= \iint_\Omega \frac{1}{\sqrt{9 - u^2 - v^2}} \|\sigma_u \times \sigma_v\|\, du\, dv \\ &= \iint_\Omega \frac{3}{9 - u^2 - v^2}\, du\, dv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 \frac{3r}{9 - r^2}\, dr\, d\theta \\ &= 9\pi \ln 2 - 3\pi \ln 5 \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III - Turma A3

Prof$^{\text{o}}$. Edson

1ª Prova **2º Semestre** **2022**

Data: 17 de Maio de 2023 **Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Calcule a integral*

$$\iint_{\Omega} (x+y)\; dx\, dy$$

sendo Ω *a região do plano delimitada pelos gráficos de* $y = |x|$ *e* $y = 4$.

Problema 2 *Resolva a integral iterada*

$$\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \int_y^{\sqrt[3]{\pi}} x^4 \cos\left(x^2 y\right) dx\, dy$$

Problema 3 *Resolva a integral dupla*

$$\iint_{\Omega} e^{-x^2-y^2} dx\, dy$$

sendo Ω *a região do plano limitada pela circunferência de raio 3 e centrada na origem.*

Problema 4 *Calcule o* ***volume*** *do sólido limitado pela superfície* $z = 1 + x^2$ *e pelos planos* $z = 5 - y$ *e* $y = 0$.

Problema 5 *Calcule a* ***massa*** *da chapa plana limitada pela curva* $x = y - y^2$ *e a reta* $x + y = 0$, *sabendo que a* ***densidade*** *num ponto qualquer da chapa é dada pela soma de suas coordenadas.*

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^o. Edson

2^o Semestre

Gabarito 1ª Prova **2022**
Data: Sábado, 20 de Maio de 2023 **Turma A3**

Exercício 1 *Deseja-se calcular a integral*

$$\iint_\Omega (x+y)\ dx\, dy$$

sendo Ω a região do plano delimitada pelos gráficos de $y = |x|$ e $y = 4$. Inicialmente, observe que Ω pode ser expresso como

$$\Omega : \begin{cases} -y \le x \le y \\ 0 \le y \le 4 \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \iint_\Omega (x+y)\ dx\, dy &= \int_0^4 \int_{-y}^{y} (x+y) dx\, dy \\ &= \int_0^4 \left(\frac{x^2}{2} + yx \right) \Big|_{-y}^{y} dy \\ &= \int_0^4 2y^2 dy \\ &= \frac{2y^3}{3} \Big|_0^4 \\ &= \frac{128}{3} \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Deseja-se resolver a seguinte integral iterada*

$$A = \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \int_y^{\sqrt[3]{\pi}} x^4 \cos\left(x^2 y\right) dx\, dy$$

Observe que o domínio de integração é o conjunto

$$\Omega : \begin{cases} y \le x \le \sqrt[3]{\pi} \\ 0 \le y \le \sqrt[3]{\pi} \end{cases},$$

que pode também ser expresso por

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le x \le \sqrt[3]{\pi} \\ 0 \le y \le x \end{cases}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} A &= \iint_\Omega x^4 \cos\left(x^2 y\right) dx\, dy \\ &= \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \int_0^{x} x^4 \cos\left(x^2 y\right) dy\, dx \\ &= \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} x^2 \text{sen}\left(x^2 y\right) \Big|_0^{x} dx \\ &= \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} x^2 \text{sen}\left(x^3\right) dx \\ &= -\frac{1}{3} \cos\left(x^3\right) \Big|_0^{\sqrt[3]{\pi}} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Para resolver integral dupla*

$$\iint_\Omega e^{-x^2-y^2} dx\, dy$$

sendo Ω a região do plano limitada pela circunferência de raio 3 centrada na origem, usaremos coordenadas polares. Em outras palavras considere

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}, \quad |J| = r$$

Neste referencial, o conjunto Ω torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \le r \le 3 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

Então,

$$\iint_{\Omega} e^{-x^2-y^2}dx\,dy = \iint_{\Omega_2} e^{-r^2}\,|J|\,dr\,d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^3 re^{-r^2}dr\,d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big|_0^3 d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e^9}\right)d\theta$$
$$= \pi\left(1-e^{-9}\right)$$

■

Exercício 4 *O volume do sólido em questão é dado por*

$$V = \iint_{\Omega}\left[(5-y)-(1+x^2)\right]dxdy$$
$$= \iint_{\Omega}\left(4-y-x^2\right)dxdy$$

sendo

$$\Omega : \begin{cases} -2 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 4-x^2 \end{cases}$$

Disto segue-se que,

$$V = \int_{-2}^{2}\int_0^{4-x^2}\left(4-y-x^2\right)dy\,dx$$
$$= \int_{-2}^{2}\left(4y-\frac{1}{2}y^2-x^2y\right)\Big|_0^{4-x^2} dx$$
$$= \int_{-2}^{2}\left(\frac{1}{2}x^4-4x^2+8\right)dx$$
$$= \left(\frac{1}{10}x^5-\frac{4}{3}x^3+8x\right)\Big|_{-2}^{2}$$
$$= \frac{256}{15}$$

■

Exercício 5 *De acordo com o enunciado do problema, segue-se que a **massa** que se deseja calcular é dada por*

$$M(\Omega) = \iint_{\Omega}\delta(x,y)dx\,dy$$

sendo

$$\delta(x,y) = x+y$$

a densidade da chapa no ponto (x,y) e

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le y \le 2 \\ -y \le x \le y-y^2 \end{cases}$$

Ou seja,

$$M(\Omega) = \int_0^2\int_{-y}^{y-y^2}(x+y)\,dx\,dy$$
$$= \int_0^2\left(\frac{x^2}{2}+xy\right)\Big|_{-y}^{y-y^2} dy$$
$$= \int_0^2\left(\frac{1}{2}y^4-2y^3+2y^2\right)dy$$
$$= \left(\frac{1}{10}y^5-\frac{1}{2}y^4+\frac{2}{3}y^3\right)\Big|_0^2$$
$$= \frac{8}{15}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III - Turma A3

Prof^{o}. Edson

2ª Prova | **2º Semestre** | **2022**

Data: 03 de Julho de 2023 | **Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Calcule o* ***volume*** *do sólido no primeiro octante que está entre os planos* $x + y + z = 1$ *e* $x + y + 2z = 1$.

Problema 2 *Calcule a integral*

$$\iiint_{\Omega} \left(x^2 + y^2\right) dx\, dy\, dz$$

sendo Ω *o sólido que está dentro do cilindro* $x^2 + y^2 = 2$*, acima do plano* $z = 0$ *e abaixo da superfície* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Problema 3 *Resolva a integral tripla*

$$\iiint_{\Omega} dx\, dy\, dz$$

sendo Ω *o sólido obtido como interseção entre* $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z$ *e* $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$

Problema 4 *Calcule o* ***momento de inércia*** *em torno do eixo z da caixa* $\Omega = [-a, a] \times [-a, a] \times [0, h]$ *assumindo que* Ω *possui massa M.*

Problema 5 *Resolva a integral*

$$\iiint_{\Omega} \left(x^2 y + 3xyz\right) dx\, dy\, dz$$

sendo Ω *a região do espaço definida pelas desigualdades*

$$1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq xy \leq 2,\ 0 \leq z \leq 1$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^{o}. Edson

2^{o} Semestre

Gabarito 2ª Prova **2022**
Data: Terça-Feira, 11 de Julho de 2023 **Turma A3**

Exercício 1 *O volume que deseja-se calcular é dado pela integral*

$$\iiint_{\Omega} dx\, dy\, dz$$

sendo Ω a região do espaço dado por

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 - x \\ \frac{1}{2}\left(1 - x - y\right) \leq z \leq 1 - x - y \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} dx\, dy\, dz &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{\frac{1}{2}(1-x-y)}^{1-x-y} dz\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} z \Big|_{\frac{1}{2}(1-x-y)}^{1-x-y} dy\, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)\, dy\, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(y - xy - \frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_0^{1-x} dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 (1-x)^2 dx \\ &= -\frac{1}{12} (1-x)^3 \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Usando* ***coordenadas cilíndricas****, ou seja*

$$\begin{cases} x = r\, \cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$|J| = \left\| \frac{\partial\left(x, y, z\right)}{\partial\left(r, \theta, z\right)} \right\| = r,$$

o conjunto Ω neste referencial, torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq r \leq \sqrt{2} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq r \end{cases}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \left(x^2 + y^2 \right) dx\, dy\, dz &= \iiint_{\Omega_2} r^2\, |J|\, dr\, d\theta\, dz \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^r r^3 dz\, d\theta\, dr \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} r^3 z \Big|_0^r d\theta\, dr \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} r^4 d\theta\, dr \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} r^4 \theta \Big|_0^{2\pi} dr \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} r^4 dr \\ &= 2\pi\, \frac{r^5}{5} \Big|_0^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{5} \pi \end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Usando* ***coordenadas esféricas****, ou seja*

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$|J| = \left\| \frac{\partial\left(x, y, z\right)}{\partial\left(\rho, \theta, \varphi\right)} \right\| = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi,$$

o conjunto Ω neste referencial, torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{4} \\ 0 \leq \rho \leq 4\cos\varphi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\iiint_{\Omega} dx\,dy\,dz &= \iiint_{\Omega_2} |J|\,d\rho\,d\theta\,d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\pi}\int_0^{4\cos\varphi} \rho^2 \operatorname{sen}\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\pi} \frac{1}{3}\rho^3 \operatorname{sen}\varphi \Big|_0^{4\cos\varphi} d\theta\,d\varphi \\
&= \frac{64}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\pi} \cos^3\varphi \operatorname{sen}\varphi\,d\theta\,d\varphi \\
&= \frac{64}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3\varphi \operatorname{sen}\varphi\,\theta \Big|_0^{2\pi} d\varphi \\
&= \frac{128\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3\varphi \operatorname{sen}\varphi d\varphi \\
&= -\frac{32\pi}{3}\cos^4\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= 8\pi
\end{aligned}$$

■

Exercício 4 *O **momento de inércia** da caixa em questão em torno do eixo z é dado por*

$$I = \iiint_{\Omega} r^2 \delta\,dx\,dy\,dz$$

sendo

$$\begin{aligned} r(x,y,z) &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \delta(x,y,z) &= k,\ k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

e

$$\Omega : \begin{cases} -a \leq x \leq a \\ -a \leq y \leq a \\ 0 \leq z \leq h \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}\int_0^h k\left(x^2+y^2\right) dz\,dx\,dy \\
&= k\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}\left(x^2+y^2\right) z\Big|_0^h dx\,dy \\
&= kh\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}\left(x^2+y^2\right) dx\,dy \\
&= kh\int_{-a}^{a}\left(\frac{1}{3}x^3+y^2x\right)\Big|_{-a}^{a} dy \\
&= kh\int_{-a}^{a}\left(\frac{2}{3}a^3+2y^2a\right) dy \\
&= kh\left(\frac{2}{3}a^3y+\frac{2}{3}y^3a\right)\Big|_{-a}^{a} \\
&= \frac{8}{3}kha^4
\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned} M &= \delta\,V(\Omega) \\ &= k\cdot 2a\cdot 2a\cdot h \\ &= 4ka^2h, \end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} I &= \frac{8}{3}kha^4 \\ &= \frac{2}{3}a^2\cdot M \end{aligned}$$

■

Exercício 5

$$\iiint_{\Omega}\left(x^2y+3xyz\right) dx\,dy\,dz$$

Considere a seguinte mudança de variáveis

$$\varphi^{-1} : \begin{cases} u = x \\ v = xy \\ w = z \end{cases}$$

ou seja,

$$\varphi : \begin{cases} x = u \\ y = \dfrac{v}{u} \\ z = w \end{cases}$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \left\| \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (u, v, w)} \right\| = \frac{1}{u}$$

Neste referencial, o conjunto Ω *torna-se*

$$\Omega_2 : \begin{cases} 1 \leq u \leq 2 \\ 0 \leq v \leq 2 \\ 0 \leq w \leq 1 \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
A &= \iiint_{\Omega} \left(x^2 y + 3xyz \right) dx\, dy\, dz \\
&= \iiint_{\Omega_2} (uv + 3vw)\, |J|\, du\, dv\, dw \\
&= \int_1^2 \int_0^2 \int_0^1 (uv + 3vw)\, \frac{1}{u} dw\, dv\, du \\
&= \int_1^2 \int_0^2 \left(vw + \frac{3vw^2}{2u} \right) \Big|_0^1 dv\, du \\
&= \int_1^2 \int_0^2 \left(v + \frac{3v}{2u} \right) dv\, du \\
&= \int_1^2 \left(\frac{v^2}{2} + \frac{3v^2}{4u} \right) \Big|_0^2 du \\
&= \int_1^2 \left(2 + \frac{3}{u} \right) du \\
&= (2u + 3 \ln |u|) \Big|_1^2 \\
&= 2 + 3 \ln 2
\end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III - Turma A3

Profº. Edson

3ª Prova **2º Semestre** **2022**

Data: 09 de Agosto de 2023 **Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Calcule a integral*

$$\int_\gamma xydx + (x^2 + x)dy$$

sendo γ *a curva fechada que corresponde à fronteira do triângulo de vértices* $(-1, 0)$, $(1, 0)$ *e* $(0, 1)$, *orientada no sentido anti horário.*

Problema 2 *Encontre a área da região da superfície do cone* $z^2 = x^2 + y^2$, *com* $z \geq 0$, *que está dentro do cilindro* $y^2 + z^2 \leq 1$

Problema 3 *Calcule o* ***fluxo*** *do fluido representado pelo campo vetorial* $\mathbf{F}(x, y, z) = (x - y)\mathbf{i} + (z + y + 4)\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ *através do disco circular* $x^2 + z^2 \leq 1$ *sobre o plano* $y = 0$, *na direção do vetor normal apontado no sentido positivo do eixo* y.

Problema 4 *Calcule*

$$\iint_\sigma \mathbf{F} \cdot n \, ds$$

sendo $F(x, y, z) = x^2z\,\mathbf{i} + yx\,\mathbf{j} + xyz\,\mathbf{k}$ *e* σ *a superfície que corresponde à fronteira do tetraedro dado por*

$$x + y + z \leq 1,\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$$

Problema 5 *Calcule o* ***fluxo do rotacional*** *de* $\mathbf{F}(x, y, z) = 3z\mathbf{i} + 5x\mathbf{j} - 2y\mathbf{k}$ *sobre a região do parabolóide* $z = x^2 + y^2$ *que fica abaixo do plano* $z = 4$, *com vetor normal apontando para cima.*

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^o. Edson

2^o Semestre

Gabarito 3ª Prova **2022**
Data: Quarta-Feira, 09 de Agosto de 2023 **Turma A3**

Exercício 1 *Inicialmente observe que o campo vetorial*

$$f(x,y) = xy\tilde{\mathbf{i}} + (x^2+x)\tilde{\mathbf{j}}$$

é contínua em todo o $\mathbb{R}^2$ *e como a curva em questão é fechada, o* ***Teorema de Green*** *garante que*

$$\begin{aligned}\int_\gamma xydx+(x^2+x)dy &= \iint_\Omega \left[\frac{\partial(x^2+x)}{\partial x} - \frac{\partial(xy)}{\partial y}\right] dxdy \\ &= \iint_\Omega (x+1)\, dxdy\end{aligned}$$

Onde Ω *é o interior do triângulo de vértices* $(-1,0)$, $(1,0)$ *e* $(0,1)$, *ou seja,*

$$\Omega_2 : \begin{cases} y-1 \leq x \leq 1-y \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\int_\gamma xydx+(x^2+x)dy &= \int_0^1 \int_{y-1}^{1-y} (x+1)\, dx\, dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{y-1}^{1-y} dy \\ &= 2\int_0^1 (1-y)\, dy \\ &= 2\left(y - \frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^1 \\ &= 1\end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Uma parametrização possível para a superfície em questão é dada por*

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \qquad\qquad (u,v) \in \Omega \\ z = \sqrt{u^2+v^2} \end{cases}$$

sendo Ω *o conjunto* $u^2+2v^2 \leq 1$, *cuja fronteira corresponde à* ***interseção*** *entre o cone e o cilindro dados.Disto segue-se, que*

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u} = \left(1, 0, \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial v} = \left(0, 1, \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u} \times \frac{\partial\sigma}{\partial v} = \left(\frac{-u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \frac{-v}{\sqrt{u^2+v^2}}, 1\right)$$

$$\left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u} \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}\right\| = \sqrt{2}$$

e a área que se deseja encontrar é, portanto

$$\begin{aligned}A &= \iint_\sigma ds \\ &= \iint_\Omega \left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u} \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}\right\| du\, dv \\ &= \iint_\Omega \sqrt{2} du\, dv \\ &= \sqrt{2}\iint_\Omega du\, dv \\ &= \sqrt{2}\, \text{Área}(\Omega) \\ &= \sqrt{2}\frac{\pi}{\sqrt{2}} \\ &= \pi\end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Uma parametrização possível para a superfície em questão é dada por*

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = 0 \quad ; \quad (u,v) \in \Omega \\ z = v \end{cases}$$

sendo Ω *o conjunto* $u^2 + v^2 \leq 1$*.Disto segue-se, que*

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = (1,0,0)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v} = (0,0,1)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} = (0,1,0)$$

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| = 1$$

e o fluxo de $\mathbf{F}$ *através de* σ *é, portanto*

$$\begin{aligned}
\tau &= \iint_\sigma \mathbf{F} \cdot n \, ds \\
&= \iint_\Omega \mathbf{F}\left(\sigma(u,v)\right) \cdot \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\|} \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| du\, dv \\
&= \iint_\Omega \mathbf{F}\left(u,0,v\right) \cdot \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right) du\, dv \\
&= \iint_\Omega \left(u, v+4, v^2\right) \cdot (0,1,0)\, du\, dv \\
&= \iint_\Omega (v+4)\, du\, dv
\end{aligned}$$

Usando coordenadas polares, ou seja

$$\begin{cases} u = r\cos\theta \\ v = r \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$|J| = r,$$

o conjunto Ω *torna-se*

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\tau &= \iint_\Omega (v+4)\, du\, dv \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (r \operatorname{sen}\theta\ + 4)\, r\, d\theta\, dr \\
&= \int_0^1 \left(-r^2 \cos\ \theta\ + 4r\theta \right) \Big|_0^{2\pi} dr
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 8\pi r\, dr \\
&= 4\pi r^2 \Big|_0^1 \\
&= 4\pi
\end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Como o campo vetorial* $\mathbf{F}$ *é continuo em todo* $\mathbb{R}^3$ *e a superfície em questão é fechada, o* ***Teorema da Divergência de Gauss****, afirma que*

$$\iint_\sigma \mathbf{F} \cdot n\, ds = \iiint_\Omega \operatorname{div} \mathbf{F}\, dx\, dy\, dz$$

sendo Ω *o interior do tetraedro dado, ou seja*

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 - x \\ 0 \leq z \leq 1 - x - y \end{cases}$$

. Disto segue-se que,

$$\begin{aligned}
\iint_\sigma \mathbf{F} \cdot n\, ds &= \iiint_\Omega (2xz + x + xy)\ dx\, dy\, dz \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (2xz + x + xy)\, dz\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(xz^2 + xz + xyz \right) \Big|_0^{1-x-y} dy\, dx \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(2x + x^2 y - 2xy - 3x^2 + x^3 \right) dy\, dx \\
&= \int_0^1 \left(2xy + \frac{1}{2}x^2y^2 - xy^2 - 3x^2y + x^3y \right) \Big|_0^{1-x} dx \\
&= \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x \right) dx \\
&= \left(-\frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{15}
\end{aligned}$$

■

Exercício 5 *De acordo com o* ***Teorema de Stokes****, tem-se que*

$$\iint_\sigma \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot n\, ds = \int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\Gamma$$

onde Γ é a curva que corresponde à fronteira da superfície σ, ou seja

$$\Gamma : \begin{cases} x = 2\,\cos t \\ y = 2\,\text{sen}\,t \quad , 0 \leq t \leq 2\pi \\ z = 4 \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\iint_{\sigma} \text{rot}\,\mathbf{F} \cdot n\, ds &= \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\Gamma \\
&= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}\left(\Gamma(t)\right) \cdot \Gamma'(t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}\left(2\,\cos t, 2\,\text{sen}\,t, 4\right) \cdot \left(-2\,\text{sen}\,t, 2\,\cos t, 0\right)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-28\,\text{sen}\,t + 20\cos^2 t\right) dt \\
&= \left(28\cos t + 10t + 5\text{sen}\,2t\right)\Big|_0^{2\pi} \\
&= 20\pi
\end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III - Turma A3

Prof$^{\text{o}}$. Edson

Prova Final | **2$^{\text{o}}$ Semestre** | **2022**

Data: 14 de Agosto de 2023 | **Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Calcule a integral iterada*

$$\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \int_y^{\sqrt[3]{\pi}} x^4 \cos\left(x^2 y\right) dx\, dy$$

Problema 2 *Calcule o **volume** do sólido no primeiro octante que está entre os planos $x + y + z = 1$ e $x + y + 2z = 1$.*

Problema 3 *Calcule a integral*

$$\iiint_\Omega \left(x^2 + y^2\right) dx\, dy\, dz$$

*sendo Ω o sólido que está **dentro** do cilindro $x^2 + y^2 = 2$, **acima** do plano $z = 0$ e **abaixo** da superfície $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.*

Problema 4 *Calcule o **fluxo** do fluido representado pelo campo vetorial*

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x - y)\mathbf{i} + (z + y + 4)\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$$

através do disco circular $x^2 + z^2 \leq 1$ sobre o plano $y = 0$, na direção do vetor normal apontado no sentido positivo do eixo y.

Problema 5 *Calcule o **fluxo do rotacional** de $\mathbf{F}(x, y, z) = 3z\mathbf{i} + 5x\mathbf{j} - 2y\mathbf{k}$ sobre a região do parabolóide $z = x^2 + y^2$ que fica abaixo do plano $z = 4$, com vetor normal apontando para cima.*

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^{o}. Edson

2^{o} Semestre

Gabarito Prova Final **2022**
Data: Terça-Feira, 15 de Agosto de 2023 **Turma A3**

Exercício 1 *Deseja-se resolver a seguinte integral iterada*

$$A = \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \int_y^{\sqrt[3]{\pi}} x^4 \cos\left(x^2 y\right) dx\, dy$$

Observe que o domínio de integração é o conjunto

$$\Omega : \begin{cases} y \le x \le \sqrt[3]{\pi} \\ 0 \le y \le \sqrt[3]{\pi} \end{cases},$$

que pode também ser expresso por

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le x \le \sqrt[3]{\pi} \\ 0 \le y \le x \end{cases}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} A &= \iint_\Omega x^4 \cos\left(x^2 y\right) dx\, dy \\ &= \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \int_0^x x^4 \cos\left(x^2 y\right) dy\, dx \\ &= \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} x^2 \text{sen}\left(x^2 y\right) \Big|_0^x dx \\ &= \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} x^2 \text{sen}\left(x^3\right) dx \\ &= -\frac{1}{3}\cos\left(x^3\right) \Big|_0^{\sqrt[3]{\pi}} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *O volume que deseja-se calcular é dado pela integral*

$$\iiint_\Omega dx\, dy\, dz$$

sendo Ω a região do espaço dado por

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 - x \\ \frac{1}{2}(1 - x - y) \le z \le 1 - x - y \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \iiint_\Omega dx\, dy\, dz &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{\frac{1}{2}(1-x-y)}^{1-x-y} dz\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} z \Big|_{\frac{1}{2}(1-x-y)}^{1-x-y} dy\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)\, dy\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(y - xy - \frac{1}{2}y^2\right) \Big|_0^{1-x} dx \\ &= \frac{1}{4}\int_0^1 (1-x)^2 dx \\ &= -\frac{1}{12}(1-x)^3 \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Usando* ***coordenadas cilíndricas****, ou seja*

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$|J| = \left\| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \right\| = r,$$

o conjunto Ω neste referencial, torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \le r \le \sqrt{2} \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le z \le r \end{cases}$$

Ou seja

$$
\begin{aligned}
\iiint_\Omega \left(x^2+y^2\right) dx\,dy\,dz &= \iiint_{\Omega_2} r^2\,|J|\,dr\,d\theta\,dz \\
&= \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^r r^3 dz\,d\theta\,dr \\
&= \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} r^3 z\Big|_0^r d\theta\,dr \\
&= \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} r^4 d\theta\,dr \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} r^4\theta\Big|_0^{2\pi} dr \\
&= 2\pi\int_0^{\sqrt{2}} r^4 dr \\
&= 2\pi\,\frac{r^5}{5}\Big|_0^{\sqrt{2}} \\
&= \frac{8\sqrt{2}}{5}\pi
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Exercício 4 *Uma parametrização possível para a superfície em questão é dada por*

$$
\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = 0 \quad ; \quad (u,v)\in\Omega \\ z = v \end{cases}
$$

sendo Ω *o conjunto* $u^2+v^2\leq 1$.*Disto segue-se, que*

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u} = (1,0,0)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial v} = (0,0,1)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v} = (0,1,0)$$

$$\left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right\| = 1$$

e o fluxo de $\mathbf{F}$ *através de* σ *é, portanto*

$$
\begin{aligned}
\tau &= \iint_\sigma \mathbf{F}\cdot n\,ds \\
&= \iint_\Omega \mathbf{F}\left(\sigma(u,v)\right)\cdot\frac{\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}}{\left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right\|}\left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right\| du\,dv \\
&= \iint_\Omega \mathbf{F}\left(u,0,v\right)\cdot\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right) du\,dv \\
&= \iint_\Omega \left(u, v+4, v^2\right)\cdot(0,1,0)\,du\,dv \\
&= \iint_\Omega (v+4)\,du\,dv
\end{aligned}
$$

Usando coordenadas polares, ou seja

$$
\begin{cases} u = r\cos\theta \\ v = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}
$$

cujo jacobiano é

$$|J| = r,$$

o conjunto Ω *torna-se*

$$
\Omega_2 : \begin{cases} 0\leq r\leq 1 \\ 0\leq\theta\leq 2\pi \end{cases}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\tau &= \iint_\Omega (v+4)\,du\,dv \\
&= \int_0^1\int_0^{2\pi} (r\,\mathrm{sen}\,\theta\,+4)\,r\,d\theta\,dr \\
&= \int_0^1 \left(-r^2\cos\,\theta\,+4r\theta\right)\Big|_0^{2\pi} dr
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 8\pi r\,dr \\
&= 4\pi r^2\Big|_0^1 \\
&= 4\pi
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Exercício 5 *De acordo com o* ***Teorema de Stokes****, tem-se que*

$$\iint_\sigma \mathrm{rot}\,\mathbf{F}\cdot n\,ds = \int_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\Gamma$$

onde Γ é a curva que corresponde à fronteira da superfície σ, ou seja

$$\Gamma : \begin{cases} x = 2\,\cos t \\ y = 2\,\mathrm{sen}\, t \quad , 0 \le t \le 2\pi \\ z = 4 \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} \mathrm{rot}\, \mathbf{F} \cdot n\, ds &= \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\Gamma \\ &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}\left(\Gamma(t)\right) \cdot \Gamma'(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}\left(2\,\cos t, 2\,\mathrm{sen}\, t, 4\right) \cdot \left(-2\,\mathrm{sen}\, t, 2\,\cos t, 0\right)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-28\,\mathrm{sen}\, t + 20\cos^2 t\right) dt \\ &= \left(28\cos t + 10t + 5\mathrm{sen}\, 2t\right)\Big|_0^{2\pi} \\ &= 20\pi \end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III - Turma M3

Profº. Edson

1ª Prova **1º Semestre** **2024**

Data: 12 de Setembro de 2024 **Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Resolva a integral*

$$\iint_\Omega \frac{2y}{\sqrt{x^4+1}}dx\,dy$$

sendo Ω *a região do plano limitada por* $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$ *e* $y = x^{\frac{3}{2}}$.

Problema 2 *Calcule o* ***volume*** *da pirâmide cuja base é o quadrado de vértices* $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(-1, 0, 0)$, $(0, -1, 0)$ *e vértice (topo da pirâmide) no ponto* $(0, 0, 6)$.

Problema 3 *Resolva a integral*

$$\iint_\Omega \frac{2y}{4+\sqrt{x^2+y^2}}dx\,dy$$

sendo $\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle|\, x^2 + y^2 \leq 4,\ x \leq 0 \right\}$.

Problema 4 *Resolva a integral dupla*

$$\iint_\Omega x^2\sqrt{x+2y}\,dx\,dy$$

sendo $\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle|\, 0 \leq x \leq 2,\ -\frac{x}{2} \leq y \leq 1 - x \right\}$.

Problema 5 *Considere a chapa plana de densidade homogênea que corresponde a um triângulo equilátero de lado 2. Qual é a distância entre o seu* ***centro de massa*** *e os lados desse triângulo?*

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^o. Edson

1^o Semestre

Gabarito 1ª Prova **2024**
Data: Sexta-feira, 14 de Setembro de 2024 **Turma M3**

Exercício 1 *O conjunto Ω pode ser descrito como*

$$\Omega : \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq x^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} A &= \iint_\Omega \frac{2y}{\sqrt{x^4+1}} dx\, dy \\ &= \int_1^2 \int_0^{x^{\frac{3}{2}}} \frac{2y}{\sqrt{x^4+1}} dy\, dx \\ &= \int_1^2 \left. \frac{y^2}{\sqrt{x^4+1}} \right|_0^{x^{\frac{3}{2}}} dx \\ &= \int_1^2 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}} dx \\ &= \left. \frac{1}{2}\sqrt{x^4+1} \right|_1^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{17}-\sqrt{2}\right) \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Explorando a simetria da pirâmide em relação ao eizo z, podemos afirmar que o seu volume é dado por 4 vezes o volume da região da mesma que encontra-se no primeiro octante. Para seu cálculo, peceba que a face que encontra-se no primeiro octante corresponde ao plano que passa pelos pontos $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,6)$, ou seja*

$$6x + 6y + z = 6$$

e está sobre o conjunto

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1-x \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} V &= 4\iint_\Omega (6-6x-6y)\, dx\, dy \\ &= 4\int_0^1 \int_0^{1-x} (6-6x-6y)\, dy\, dx \\ &= 4\int_0^1 \left(6y - 6xy - 3y^2\right) \Big|_0^{1-x} dx \\ &= 12\int_0^1 \left(1-2x+x^2\right) dx \\ &= 12\left(x - x^2 + \frac{1}{3}x^3\right) \Big|_0^1 \\ &= 4 \end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Deseja-se calcular a integral*

$$\iint_\Omega \frac{2y}{4+\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$$

sendo Ω o conjunto $x^2+y^2 \leq 4$, com $x \leq 0$ Usando ***coordenadas polares****, ou seja*

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \end{cases}, \quad |J| = r,$$

observe que o conjunto Ω, neste referencial, torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ \dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Logo,

$$\iint_\Omega \frac{2y}{4+\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \iint_{\Omega_2} \frac{2r\,\mathrm{sen}\,\theta}{4+r}\,|J|\,dr\,d\theta$$
$$= \int_0^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{2r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}{4+r} d\theta\,dr$$
$$= \int_0^2 \left.\frac{-2r^2\,\cos\theta}{4+r}\right|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} dr$$
$$= \int_0^2 \frac{-2r^2}{4+r}\,(0-0)\,dr$$
$$= 0$$

■

Exercício 4 *Para resolver a integral dada, considere a seguinte* ***mudança de variáveis***

$$\varphi^{-1}: \begin{cases} u = x+2y \\ v = x \end{cases}$$

ou seja,

$$\varphi: \begin{cases} x = v \\ y = \dfrac{u-v}{2} \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$|J| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left\|\begin{matrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}$$

Neste referencial, o conjunto Ω torna-se

$$\Omega_2: \begin{cases} 0 \le u \le 2-v \\ 0 \le v \le 2 \end{cases}$$

Então,

$$\iint_\Omega x^2\sqrt{x+2y}\,dx\,dy = \iint_{\Omega_2} v^2\sqrt{u}\,|J|\,du\,dv$$
$$= \int_0^2\int_0^{2-v} \frac{1}{2}v^2\sqrt{u}du\,dv$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^2 v^2 u^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{2-v} dv$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^2 v^2\,(2-v)^{\frac{3}{2}}\,dv$$
$$= -\frac{1}{3}\int_2^0 (2-w)^2\,w^{\frac{3}{2}}dw$$
$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{8}{5}w^{\frac{5}{2}} - \frac{8}{7}w^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{9}w^{\frac{9}{2}}\right)\Big|_2^0$$
$$= \frac{256}{945}\sqrt{2}$$

■

Exercício 5 *De acordo com o enunciado do problema, segue-se que a* ***massa*** *que se deseja calcular é dada por*

$$M(\Omega) = \iint_\Omega \delta(x,y)dx\,dy$$

sendo

$$\delta(x,y) = k,\ k \in \mathbb{R}$$

a densidade da chapa no ponto (x,y) e

$$\Omega: \begin{cases} \frac{y}{\sqrt{3}} - 1 \le x \le 1 - \frac{y}{\sqrt{3}} \\ 0 \le y \le \sqrt{3} \end{cases}$$

Ou seja,

$$M(\Omega) = \int_0^{\sqrt{3}}\int_{\frac{y}{\sqrt{3}}-1}^{1-\frac{y}{\sqrt{3}}} k\,dx\,dy$$
$$= k\int_0^{\sqrt{3}} x\Big|_{\frac{y}{\sqrt{3}}-1}^{1-\frac{y}{\sqrt{3}}} dy$$
$$= 2k\int_0^{\sqrt{3}} \left(1-\frac{y}{\sqrt{3}}\right) dy$$
$$= 2k\left(y - \frac{y^2}{2\sqrt{3}}\right)\Big|_0^{\sqrt{3}}$$
$$= k\sqrt{3}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III - Turma M3

Profº. Edson

2ª Prova	**1º Semestre**	**2024**
Data: 22 de outubro de 2024		**Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Calcule a integral*

$$\iiint_\Omega x\,dx\,dy\,dz$$

sendo Ω *a região no primeiro octante, limitada acima por* $z = 8 - 2x^2 - y^2$ *e abaixo por* $z = y^2$.

Problema 2 *Calcule o* ***volume*** *do cone circular reto de altura* h *e raio* R.

Problema 3 *Calcule*

$$\iiint_\Omega \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dx\,dy\,dz$$

sendo Ω *o sólido definido por* $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$.

Problema 4 *Determine a coordenada* z *do* ***centro de massa*** *do sólido* Ω *que está acima da esfera* $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ *e abaixo do parabolóide* $z = 4 - x^2 - y^2$. *Suponha densidade homogênea igual a* 1.

Problema 5 *Calcule o* ***volume*** *do elipsóide*

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

sendo a, b, c *números reais positivos e não nulos.*

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^{o}. Edson

1^{o} Semestre

Gabarito 2ª Prova **2024**
Data: Quinta-feira, 14 de Novembro **Turma M3**

Exercício 1 *O conjunto* Ω *pode ser descrito como*

$$\Omega : \begin{cases} y^2 \leq z \leq 8 - 2x^2 - y^2 \\ (x, y) \in K \end{cases}$$

sendo K o conjunto do pontos (x, y) *tais que*

$$x^2 + y^2 \leq 4$$

Desta forma,

$$A = \iiint_\Omega x \, dx \, dy \, dz$$

$$= \iint_K \int_{y^2}^{8-2x^2-y^2} x \, dz \, dx \, dy$$

$$= \iint_K xz \Big|_{y^2}^{8-2x^2-y^2} dx \, dy$$

$$= \iint_K x \left(8 - 2x^2 - 2y^2\right) dx \, dy$$

Usando ***coordenadas polares****, ou seja*

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \end{cases}, \quad |J| = r,$$

o conjunto K, neste referencial, torna-se

$$K_2 : \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Logo,

$$A = \iint_K x \left(8 - 2x^2 - 2y^2\right) dx \, dy$$

$$= \iint_{K_2} r\cos\theta \left(8 - 2r^2\right) |J| \, dr \, d\theta$$

$$= \iint_{K_2} \cos\theta \left(8r^2 - 2r^4\right) dr \, d\theta$$

$$= \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \left(8r^2 - 2r^4\right) d\theta \, dr$$

$$= \int_0^2 \operatorname{sen}\theta \left(8r^2 - 2r^4\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dr$$

$$= \int_0^2 \left(8r^2 - 2r^4\right) dr$$

$$= \frac{8}{3}r^3 - \frac{2}{5}r^5 \Big|_0^2$$

$$= \frac{128}{15}$$

■

Exercício 2 *Observe que a equação do cone em questao é dada por*

$$x^2 + y^2 = \frac{R^2}{h^2} z^2$$

com $0 \leq z \leq h$*. Logo, seu volume é dado por*

$$V(\Omega) = \iiint_\Omega 1 \, dx \, dy \, dz$$

onde

$$\Omega : \begin{cases} \frac{h}{R}\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq h \\ (x, y) \in K \end{cases}$$

$$6x + 6y + z = 6$$

sendo K o conjunto do pontos (x, y) *tais que*

$$x^2 + y^2 \leq R^2$$

Usando ***coordenadas cilíndricas****, ou seja*

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases}, \quad |J| = r,$$

o conjunto Ω*, neste referencial, torna-se,*

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \frac{h}{R} r \leq z \leq h \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
V(\Omega) &= \iiint_{\Omega} 1\ |J|\, dr\, d\theta\, dz \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_{\frac{h}{R}r}^{h} r\, dz\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^R (rz)\Big|_{\frac{h}{R}r}^{h} dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^R \left(hr - \frac{h}{R}r^2\right) dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{hr^2}{2} - \frac{hr^3}{3R}\right)\Big|_0^R d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{hR^2}{6} d\theta \\
&= \frac{1}{3}\pi R^2 h
\end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Perceba que o sólido Ω pode ser expresso da seguinte maneira*

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 + z^2 \le 2z \Rightarrow \\
x^2 + y^2 + z^2 - 2z + 1 \le 1 \Rightarrow \\
x^2 + y^2 + (z-1)^2 \le 1
\end{aligned}$$

*Ou seja,Ω é a esfera sólida de raio unitário e centro em $(0,0,1)$. Usando **coordenadas esféricas**,*

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen} \varphi \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases},$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi,$$

o conjunto Ω, neste referencial torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le \rho \le 2\cos\varphi \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz \\
&= \iiint_{\Omega_2} \rho\, |J|\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\varphi} \rho^3 \operatorname{sen}\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^4}{4}\operatorname{sen}\varphi\Big|_0^{2\cos\varphi} d\varphi\, d\theta \\
&= 4\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\varphi \cos^4\varphi d\varphi\, d\theta \\
&= -\frac{4}{5}\int_0^{2\pi} \cos^5\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\
&= \frac{4}{5}\int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \frac{8\pi}{5}
\end{aligned}$$

■

Exercício 4 *De acordo com o enunciado do problema, segue-se que a coordenada z do **centro de massa** do sólido Ω é dada por*

$$z_c = \iiint_{\Omega} z\delta(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

sendo

$$\delta(x,y) = 1$$

a densidade de Ω no ponto (x,y,z) e

$$\Omega : \begin{cases} \sqrt{6 - x^2 - y^2} \le z \le 4 - x^2 - y^2 \\ x^2 + y^2 \le 2 \end{cases}$$

*Usando **coordenadas cilíndricas**,*

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases},$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = r,$$

o conjunto Ω, neste referencial torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \le r \le \sqrt{2} \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ \sqrt{6 - r^2} \le z \le 4 - r^2 \end{cases}$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
M(\Omega) &= \iiint_\Omega \delta(x,y,z)dx\,dy\,dz \\
&= \iiint_{\Omega_2} |J|\,dr\,d\theta\,dz \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_{\sqrt{6-r^2}}^{4-r^2} r\,dz\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} rz\Big|_{\sqrt{6-r^2}}^{4-r^2} dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \left(4r - r^3 - r\sqrt{6-r^2}\right) dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(2r^2 - \frac{1}{4}r^4 + \frac{1}{3}\sqrt{(6-r^2)^3}\right)\Big|_0^{\sqrt{2}} d\theta \\
&= \left(\frac{17}{3} - 2\sqrt{6}\right)\int_0^{2\pi} d\theta \\
&= 2\pi\left(\frac{17}{3} - 2\sqrt{6}\right) \\
&= \frac{2\pi\left(17 - 6\sqrt{6}\right)}{3}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
z_c &= \frac{1}{M(\Omega)}\iiint_\Omega z\delta(x,y,z)dx\,dy\,dz \\
&= \frac{3}{2\pi\left(17-6\sqrt{6}\right)}\iiint_{\Omega_2} z\,|J|\,dr\,d\theta\,dz \\
&= \frac{3}{2\pi\left(17-6\sqrt{6}\right)}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_{\sqrt{6-r^2}}^{4-r^2} zr\,dz\,dr\,d\theta \\
&= \frac{3}{4\pi\left(17-6\sqrt{6}\right)}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} rz^2\Big|_{\sqrt{6-r^2}}^{4-r^2} dr\,d\theta \\
&= \frac{3}{4\pi\left(17-6\sqrt{6}\right)}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \left(10r - 7r^3 + r^5\right) dr\,d\theta \\
&= \frac{3}{4\pi\left(17-6\sqrt{6}\right)}\int_0^{2\pi} \left(5r^2 - \frac{7}{4}r^4 + \frac{1}{6}r^6\right)\Big|_0^{\sqrt{2}} d\theta \\
&= \frac{13}{4\pi\left(17-6\sqrt{6}\right)}\int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \frac{13}{2\left(17-6\sqrt{6}\right)}
\end{aligned}
$$

■

Exercício 5 *Para calcular o volume desejado, considere a seguinte **mudança de variáveis** que consiste numa deformação das coordenadas esféricas*

$$
\begin{cases}
\dfrac{x}{a} = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta \\
\dfrac{y}{b} = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta \\
\dfrac{z}{c} = \rho\ \cos\varphi
\end{cases}
$$

ou seja,

$$
\begin{cases}
x = a\,\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta \\
y = b\,\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta \\
z = c\,\rho\ \cos\varphi
\end{cases}
$$

cujo jacobiano é dado por

$$
\begin{aligned}
|J| &= \left\|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}\right\| \\
&= a\,b\,c\,\rho^2\mathrm{sen}\,\varphi
\end{aligned}
$$

*Neste referencial, o **elipsóide** Ω, torna-se*

$$
\Omega_2 : \begin{cases}
0 \le \varphi \le \pi \\
0 \le \rho \le 1 \\
0 \le \theta \le 2\pi
\end{cases}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
V(\Omega) &= \iiint_\Omega 1dx\,dy\,dz \\
&= \iiint_{\Omega_2} 1\ |J|\,d\rho\,d\theta\,d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 a\,b\,c\,\rho^2\mathrm{sen}\,\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta \\
&= \frac{a\,b\,c}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \rho^3\mathrm{sen}\,\varphi\Big|_0^1 d\varphi\,d\theta \\
&= \frac{a\,b\,c}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{sen}\,\varphi d\varphi\,d\theta \\
&= -\frac{a\,b\,c}{3}\int_0^{2\pi} \cos\varphi\Big|_0^{\pi} d\theta
\end{aligned}
$$

$$= \frac{2a\,b\,c}{3}\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{4}{3}\pi\,a\,b\,c$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III - Turma M3

Prof$^{\text{o}}$. Edson

3$^{\text{a}}$ Prova | **1$^{\text{o}}$ Semestre** | **2024**

Data: 3 de dezembro de 2024 | **Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Calcule*

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\gamma$$

sendo

$$\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

e γ é a fronteira do triângulo de vértices $(0, 1)$, $(0, -1)$ e $(1, 0)$, orientada no sentido antihorário.

Problema 2 *Calcule a* ***área*** *da região do plano formada pelos pontos (x, y) tais de*

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

com $y \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Problema 3 *Calcule o* ***fluxo*** *do campo vetorial*

$$\mathbf{F}(x, y) = (x - y, -x + 2y)$$

no sentido externo à curva correspondente à fronteira da região do plano definida pelos ponts (x, y) tais que $1 - x \leq y \leq 3$ e $0 \leq x \leq 1$.

Problema 4 *Calcule a* ***área da superfície*** *do parabolóide $z = 2\left(x^2 + y^2\right)$, com $0 \leq z \leq 8$.*

Problema 5 *Calcule*

$$\iint_{\sigma} (\nabla \times F) \cdot \mathbf{n}\, ds$$

sendo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}$$

e σ é o parabolóide (sem a base)

$$x = 9 - y^2 - z^2,\ 0 \leq x \leq 9$$

com $\mathbf{n}$ apontando no sentido positivo do eixo x e $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof. Edson

1º Semestre

Gabarito 3ª Prova **2024**
Data: Sábado, 7 de Dezembro **Turma M3**

Exercício 1 *Observe que γ é uma curva fechada, orientada no sentido antihorário. Segue-se do* ***Teorema de Green****, que*

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F \cdot d\gamma &= \int_\gamma x dx + y dy \\
&= \iint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}(y) - \frac{\partial}{\partial y}(x)\right] dx\, dy \\
&= \iint_\Omega 0 dx\, dy \\
&= 0
\end{aligned}$$

sendo Ω o interior da curva γ. ■

Exercício 2 *Seja γ a curva que corresponde à fronteira da região em questão. Uma parametrição possível para esta curva é dada por*

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$$

sendo

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases} ; \ \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{3\pi}{4}$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x = t \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} ; \ -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq t \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Assim, a área que deseja-se calcular é dada por

$$\begin{aligned}
A &= \int_\gamma x dy \\
&= \int_{\gamma_1} x dy + \int_{\gamma_2} x dy \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos^2 t\, dt + \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t\, 0\, dt \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt \\
&= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}
\end{aligned}$$

$$A = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

■

Exercício 3 *O* ***fluxo*** *que deseja-se calcular é dado por*

$$\tau = \int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\gamma$$

e, o ***Teorema da Divergência de Gauss*** *afirma que*

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\gamma = \iint_\Omega \operatorname{div} \mathbf{F}\, dx\, dy$$

sendo Ω o interior da curva γ, ou seja

$$\Omega : \begin{cases} 1 - x \leq y \leq 3 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Além disso, tem-se que

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \mathbf{F} &= \nabla \cdot \mathbf{F} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \cdot (x - y, -x + 2y) \\
&= 3
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\tau &= \int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\gamma \\
&= \iint_\Omega \operatorname{div} \mathbf{F}\, dx\, dy \\
&= \iint_\Omega 3\, dx\, dy \\
&= 3\, \text{Área}(\Omega) \\
&= \frac{15}{2}
\end{aligned}$$

Perceba que Ω é um trapézio de bases 2 e 3 com altura 1. ■

Exercício 4 *Uma parametrização possível para a superfície em questão é dada por*

$$\sigma : \begin{cases} x = u\cos v \\ y = u \operatorname{sen} v \\ z = 2u^2 \end{cases} ; \underbrace{\begin{matrix} 0 \leq u \leq 2 \\ 0 \leq v \leq 2\pi \end{matrix}}_{\Omega}$$

Donde segue-se que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = (\cos v, \operatorname{sen} v, 4u)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v} = (-u \operatorname{sen} v, u\cos v, 0)$$

e

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} = \left(-4u^2\cos v, -4u^2 \operatorname{sen} v, u\right)$$

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| = u\sqrt{16u^2+1}$$

e a área da superfície de σ é dada por

$$\begin{aligned} A &= \iint_\sigma ds \\ &= \iint_\Omega \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| du\, dv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 u\sqrt{16u^2+1} du\, dv \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{65\sqrt{65}-1}{48} dv \\ &= \frac{65\sqrt{65}-1}{24}\pi \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Observe que a fronteira da superfície σ é a curva Γ com possível parametrização dada por*

$$\Gamma : \begin{cases} x = 0 \\ y = 3\cos t \ ; \ 0 \leq t \leq 2\pi \\ z = 3 \operatorname{sen} t \end{cases}$$

e usando o ***Teorema de Stokes****, segue-se que*

$$\begin{aligned} \iint_\sigma (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, ds &= \int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\Gamma \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{r}{\|r\|} \cdot \Gamma' dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot \left(x', y', z'\right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t \cos t\, dt \\ &= \left.\frac{\operatorname{sen}^2 t}{2}\right|_0^{2\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III - Turma M3

Prof. Edson

Prova Final **1º Semestre** **2024**

Data: Terça-feira, 10 de Dezembro de 2024 **Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Resolva a integral*

$$\iint_{\Omega} \frac{2y}{4+\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$$

sendo $\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, x^2+y^2 \leq 4,\ x \leq 0 \right\}$.

Problema 2 *Calcule o* ***volume*** *do cone circular reto de altura h e raio R.*

Problema 3 *Calcule*

$$\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$$

sendo Ω *o sólido definido por* $x^2+y^2+z^2 \leq 2z$.

Problema 4 *Calcule a* ***área*** *da região do plano formada pelos pontos* (x,y) *tais de*

$$x^2+y^2 \leq 1$$

com $y \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Problema 5 *Calcule a* ***área da superfície*** *do parabolóide* $z = 2\left(x^2+y^2\right)$, *com* $0 \leq z \leq 8$.

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof. Edson

1º Semestre

Gabarito Prova Final **2024**
Data: Quarta-feira, 11 de Dezembro **Turma M3**

Exercício 1 *Deseja-se calcular a integral*

$$\iint_{\Omega} \frac{2y}{4+\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$$

sendo Ω *o conjunto* $x^2+y^2 \leq 4$, *com* $x \leq 0$ *Usando* ***coordenadas polares***, *ou seja*

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}, \quad |J| = r,$$

observe que o conjunto Ω, *neste referencial, torna-se*

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ \dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega} \frac{2y}{4+\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy &= \iint_{\Omega_2} \frac{2r\,\mathrm{sen}\,\theta}{4+r}\, |J|\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{2r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}{4+r} d\theta\, dr \\
&= \int_0^2 \left. \frac{-2r^2\,\cos\theta}{4+r} \right|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} dr \\
&= \int_0^2 \frac{-2r^2}{4+r}\,(0-0)\, dr \\
&= 0
\end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Observe que a equação do cone em questao é dada por*

$$x^2+y^2 = \frac{R^2}{h^2}z^2$$

com $0 \leq z \leq h$. *Logo, seu volume é dado por*

$$V(\Omega) = \iiint_{\Omega} 1\, dx\, dy\, dz$$

onde

$$\Omega : \begin{cases} \frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq h \\ (x,y) \in K \end{cases}$$

$$6x+6y+z=6$$

sendo K *o conjunto do pontos* (x,y) *tais que*

$$x^2+y^2 \leq R^2$$

Usando ***coordenadas cilíndricas***, *ou seja*

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}, \quad |J| = r,$$

o conjunto Ω, *neste referencial, torna-se,*

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \frac{h}{R}r \leq z \leq h \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
V(\Omega) &= \iiint_{\Omega} 1\, |J|\, dr\, d\theta\, dz \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^R \int_{\frac{h}{R}r}^{h} r\, dz\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^R \left. (rz) \right|_{\frac{h}{R}r}^{h} dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^R \left(hr - \frac{h}{R}r^2\right) dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left. \left(\frac{hr^2}{2} - \frac{hr^3}{3R}\right) \right|_0^R d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{hR^2}{6} d\theta \\
&= \frac{1}{3}\pi R^2\, h
\end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Perceba que o sólido Ω pode ser expresso da seguinte maneira*

$$x^2+y^2+z^2 \leq 2z \Rightarrow$$
$$x^2+y^2+z^2-2z+1 \leq 1 \Rightarrow$$
$$x^2+y^2+(z-1)^2 \leq 1$$

Ou seja,Ω é a esfera sólida de raio unitário e centro em $(0,0,1)$. *Usando* ***coordenadas esféricas***,

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases},$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi,$$

o conjunto Ω, neste referencial torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leq \rho \leq 2\cos\varphi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} I &= \iiint_\Omega \sqrt{x^2+y^2+z^2}dx\,dy\,dz \\ &= \iiint_{\Omega_2} \rho\,|J|\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\varphi} \rho^3 \operatorname{sen}\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^4}{4}\operatorname{sen}\varphi\Big|_0^{2\cos\varphi} d\varphi\,d\theta \\ &= 4\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\varphi\cos^4\varphi d\varphi\,d\theta \\ &= -\frac{4}{5}\int_0^{2\pi} \cos^5\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\ &= \frac{4}{5}\int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{8\pi}{5} \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Seja γ a curva que corresponde à fronteira da região em questão. Uma parametrição possível para esta curva é dada por*

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$$

sendo

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases} ; \quad \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{3\pi}{4}$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x = t \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} ; \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq t \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Assim, a área que deseja-se calcular é dada por

$$\begin{aligned} A &= \int_\gamma xdy \\ &= \int_{\gamma_1} xdy + \int_{\gamma_2} xdy \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos^2 t\,dt + \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t\,0\,dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt \\ &= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \\ A &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Uma parametrização possível para a superfície em questão é dada por*

$$\sigma : \begin{cases} x = u\cos v \\ y = u \operatorname{sen} v \\ z = 2u^2 \end{cases} ; \quad \underbrace{\begin{matrix} 0 \leq u \leq 2 \\ 0 \leq v \leq 2\pi \end{matrix}}_{\Omega}$$

Donde segue-se que

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u} = (\cos v, \operatorname{sen} v, 4u)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial v} = (-u\operatorname{sen} v, u\cos v, 0)$$

e

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u} \times \frac{\partial\sigma}{\partial v} = \left(-4u^2\cos v, -4u^2 \operatorname{sen} v, u\right)$$

$$\left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u} \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}\right\| = u\sqrt{16u^2+1}$$

e a área da superfície de σ é dada por

$$
\begin{aligned}
A &= \iint_{\sigma} ds \\
&= \iint_{\Omega} \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| du\, dv \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 u \sqrt{16u^2 + 1} du\, dv \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{65\sqrt{65} - 1}{48} dv \\
&= \frac{65\sqrt{65} - 1}{24} \pi
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III - Turma M3

Profº. Edson

1ª Prova | **2º Semestre** | **2025**

Data: 23 de Setembro | **Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Resolva a integral*

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{x}{y^5+1}\,dy\,dx$$

Problema 2 *Calcule a integral*

$$\iint_\Omega e^{4x-y}\,dx\,dy$$

sendo Ω *o paralelogramo gerado pelos vetores* $(4,1)$ *e* $(3,3)$.

Problema 3 *Calcule o* ***volume*** *do tetraedro limitado pelos planos coordenados,* $x=0$, $y=0$, $z=0$, *e o plano* $z=8-2x-4y$.

Problema 4 *Resolva a integral dupla*

$$\iint_\Omega \left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\,dx\,dy$$

sendo $\Omega = \left\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle|\, x^2+y^2\leq 1,\ x+y\geq 1\right\}$.

Problema 5 *Calcule a massa de uma chapa plana cujo formato é dado pelo conjunto dos pontos* $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *tais que* $x^2+y^2\leq 20^2$ *e* $x\geq 10$ *e densidade dada por*

$$\delta(x,y)=\frac{x^2}{x^2+y^2}$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^o. Edson

2^o Semestre

Gabarito 1ª Prova **2025**
Data: Quarta-feira, 01 de Outubro **Turma M3**

Exercício 1 *Observe que o domínio de integração Ω é dado por*

$$\Omega : \begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ \sqrt{x} \leq y \leq 2 \end{cases}$$

e pode ser reescrito como

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq y^2 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{x}{y^5+1} dy\, dx \\ &= \iint_\Omega \frac{x}{y^5+1} dx\, dy \\ &= \int_0^2 \int_0^{y^2} \frac{x}{y^5+1} dx\, dy \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{x^2}{y^5+1}\Bigg|_0^{y^2} dy \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{y^4}{y^5+1} dy \\ &= \frac{1}{10} \ln\left|y^5+1\right| \Bigg|_0^2 \\ &= \frac{\ln 33}{10} \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Para resolver a integral dada, considere a seguinte* ***mudança de variáveis***

$$\varphi^{-1} : \begin{cases} u = 4x - y \\ v = x \end{cases}$$

ou seja,

$$\varphi : \begin{cases} x = v \\ y = 4v - u \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$\begin{aligned} |J| &= \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \\ &= \left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{matrix} \right\| \\ &= 1 \end{aligned}$$

Neste referencial, o conjunto Ω gerado pelos vetores $(1,4)$ e $(3,3)$ torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq u \leq 9 \\ \frac{u}{3} \leq v \leq \frac{u+3}{3} \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} \iint_\Omega e^{4x-y} dx\, dy &= \iint_{\Omega_2} e^u\, |J|\, du\, dv \\ &= \int_0^9 \int_{\frac{u}{3}}^{\frac{u+3}{3}} e^u dv\, du \\ &= \int_0^9 e^u v \Bigg|_{\frac{u}{3}}^{\frac{u+3}{3}} du \\ &= \int_0^9 e^u dv \\ &= e^u \Bigg|_0^9 \\ &= e^9 - 1 \end{aligned}$$

■

Obs.: *Este problema foi* ***cancelado***. *Houve um erro de digitação e ao invés do vetor (4,1) o correto deveria ser (1,4). Pontos concedidos a cada aluno que fez a prova.*

Exercício 3 *O volume que deseja-se encontrar é dado por*

$$V = \iint_\Omega (8 - 2x - 4y)\, dx\, dy$$

sendo

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 - 2y \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Ou seja,,

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^2 \int_0^{4-2y} (8-2x-4y)\, dx\, dy \\
&= \int_0^2 \left(8x - x^2 - 4yx\right) \Big|_0^{4-2y} dy \\
&= \int_0^2 \left(4y^2 - 16y + 16\right) dy \\
&= \left(\frac{4}{3}y^3 - 8y^2 + 16y\right) \Big|_0^2 \\
&= \frac{32}{3}
\end{aligned}
$$

■

Exercício 4 *Deseja-se calcular a integral*

$$\iint_\Omega \left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}} dx\, dy$$

sendo Ω o conjunto $x^2+y^2 \leq 1$, com $x+y \geq 1$ Usando ***coordenadas polares****, ou seja*

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}, \quad |J| = r,$$

observe que o conjunto Ω, neste referencial, torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} \dfrac{1}{\mathrm{sen}\,\theta + \cos\theta} \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\iint_\Omega \left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}} dx\, dy &= \iint_{\Omega_2} \left(r^2\right)^{-\frac{3}{2}} |J|\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta+\cos\theta}}^1 r^{-3} r dr\, d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{r}\Big|_{\frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta+\cos\theta}}^1 d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\mathrm{sen}\,\theta + \cos\theta - 1)\, d\theta \\
&= (-\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta - \theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2 - \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

■

Exercício 5 *De acordo com o enunciado do problema, segue-se que a* ***massa*** *da lâmina designada por Ω é dada por*

$$M(\Omega) = \iint_\Omega \delta(x,y) dx\, dy$$

sendo

$$\delta(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

a densidade da chapa no ponto (x,y) e

$$\Omega : \begin{cases} x^2+y^2 \leq 20^2 \\ x \geq 10 \end{cases}$$

Usando ***coordenadas polares****, ou seja*

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}, \quad |J| = r,$$

observe que o conjunto Ω, neste referencial, torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} \dfrac{10}{\cos\theta} \leq r \leq 20 \\ -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

Ou seja,

$$
\begin{aligned}
M(\Omega) &= \iint_{\Omega_2} \frac{r^2\cos^2\theta}{r^2} |J|\, dr\, d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \int_{\frac{10}{\cos\theta}}^{20} r\ \cos^2\theta\, dr\, d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} r^2 \cos^2\theta \Big|_{\frac{10}{\cos\theta}}^{20} d\theta \\
&= 50 \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(4\cos^2\theta - 1\right) d\theta \\
&= 50 \left(\theta + \frac{1}{2}\mathrm{sen}\, 2\theta\right) \Big|_{-\frac{\pi}{3}-}^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \frac{100\pi}{3} + 50\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III - Turma M3

Profº. Edson

2ª Prova **2º Semestre** **2025**

Data: 06 de Novembro **Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Calcule a integral*

$$\iiint_\Omega dx\, dy\, dz$$

sendo Ω *o sólido delimitado pelos planos* $y - 2x = 0$, $y - 2x = 1$, $z - 3y = 0$, $z - 3y = 1$, $z - 4x = 0$, $z - 4x = 3$.

Problema 2 *Calcule o* ***volume*** *do sólido que encontra-se dentro da superfície* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ *e entre os planos* $z = 1$ *e* $z = 2$

Problema 3 *Calcule o* ***volume*** *do sólido que encontra-se dentro da esfera* $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ *e acima da esfera* $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Problema 4 *Calcule o* ***volume do shampoo****.*

Problema 5 *Calcule a* ***massa*** *da esfera* $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ *sabendo que sua densidade no ponto* (x, y, z) *é proporcional à distância deste ponto à origem.*

Problema 6 *(**Questão extra:** exclusiva para os alunos que não participaram do problema do shampoo) Considere o cubo* $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, *e* $0 \leq z \leq 1$ *e suponha que a densidade no ponto* (x, y, z) *seja igual a* x. *Calcule o* ***momento de inércia*** *deste cubo em relação ao eixo* z.

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^o. Edson

2^o Semestre

Gabarito 2ª Prova **2025**
Data: Terça-feira, 25 de Novembro **Turma M3**

Exercício 1 *Considere a seguinte mudança de variáveis*

$$\varphi^{-1}: \begin{cases} u = y - 2x \\ v = z - 3y \\ w = z - 4x \end{cases}$$

ou seja,

$$\varphi: \begin{cases} x = \dfrac{-3u - v + w}{2} \\ y = -2u - v + w \\ z = -6u - 2v + 3w \end{cases},$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|$$
$$[8pt] = \left\| \begin{matrix} -\dfrac{3}{2} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -2 & -1 & 1 \\ -6 & -2 & 3 \end{matrix} \right\|$$
$$= \frac{1}{2}$$

E, neste referencial, o conjunto Ω torna-se

$$\Omega_2: \begin{cases} 0 \le u \le 1 \\ 0 \le v \le 1 \\ 0 \le w \le 3 \end{cases}$$

E disto segue-se que

$$\iiint_\Omega dx\,dy\,dz = \iiint_{\Omega_1} |J|\,du\,dv\,dw$$
$$= \int_0^3\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{2} du\,dv\,dw$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^3\int_0^1 u\Big|_0^1 dv\,dw$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^3 v\Big|_0^1 dw$$
$$= \frac{1}{2} v\Big|_0^3$$
$$= \frac{3}{2}$$

■

Exercício 2 *Usando **coordenadas cilíndricas**, ou seja*

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases},$$

cujo jacobiano é

$$|J| = r$$

Neste referencial, o sólido Ω, dado no problema, torna-se

$$\Omega_2: \begin{cases} 0 \le r \le z \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 1 \le z \le 2 \end{cases}$$

e o volume de Ω é dado por,

$$V(\Omega) = \iiint_\Omega 1\,dx\,dy\,dz$$
$$= \iiint_{\Omega_2} |J|\,dr\,d\theta\,dz$$
$$= \int_1^2\int_0^{2\pi}\int_0^z r\ dr\,d\theta\,dz$$
$$= \int_1^2\int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2}\Big|_0^z d\theta\,dz$$
$$= \int_1^2\int_0^{2\pi} \frac{z^2}{2} d\theta\,dz$$
$$= \int_1^2 \left(\frac{z^2}{2}\theta\right)\Big|_0^{2\pi} dz$$

$$= \pi \int_1^2 z^2 dz$$

$$= \pi \left. \frac{z^3}{3} \right|_1^2$$

$$= \frac{7\pi}{3}$$

■

Exercício 3 *Considerando Ω o sólido descrito no problema, ou seja*

$$\Omega : \begin{cases} x^2 + y^2 + (z-1)^2 \le 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 \ge 1 \end{cases}$$

O seu volume é dado por

$$V = \iiint_\Omega dx\, dy\, dz$$

Usando ***coordendas esféricas****, ou seja*

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen} \varphi \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases},$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \rho^2 \operatorname{sen} \varphi,$$

neste referencial, o conjunto Ω torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3} \\ 1 \le \rho \le 2\cos\varphi \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

Ou seja,,

$$V = \iiint_{\Omega_2} |J|\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_1^{2\cos\varphi} \rho^2 \operatorname{sen} \varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{3} \rho^3 \operatorname{sen} \varphi \right) \Bigg|_1^{2\cos\varphi} d\varphi\, d\theta$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(8\cos^3 \varphi \operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} \varphi \right) d\varphi\, d\theta$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left(-2\cos^4 \varphi + \cos\varphi \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta$$

$$= \frac{11}{24} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{11}{12}\pi$$

■

Exercício 4 ***Trabalho Extra-classe.***

Exercício 5 *De acordo com o enunciado do problema, a densidade do sólido é*

$$\delta(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

onde $k \in \mathbb{R}$. Usando ***coordendas esféricas****, ou seja*

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen} \varphi \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases},$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \rho^2 \operatorname{sen} \varphi,$$

a esfera de raio a, neste referencial, torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le \rho \le a \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

Logo,

$$M = \iiint_\Omega \delta(x, y, z)\ dx\, dy\, dz$$

$$= k \iiint_{\Omega_2} \sqrt{\rho^2}\, |J|\ d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

$$= k \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho^3 \operatorname{sen} \varphi d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

$$= k \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\rho^4}{4} \operatorname{sen} \varphi \Bigg|_0^a d\theta\, d\varphi$$

$$= k \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{a^4}{4} \operatorname{sen} \varphi\, d\theta\, d\varphi$$

$$= k \int_0^\pi \frac{a^4}{4} \operatorname{sen} \varphi\, \theta \Bigg|_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= k \frac{\pi a^4}{2} \int_0^\pi \operatorname{sen} \varphi\, d\varphi$$

$$= k \frac{\pi a^4}{2}\ (-\cos\ \varphi) \Bigg|_0^\pi$$

$$= k\pi a^4$$

■

Exercício 6 *De acordo com o enunciado do problema, segue-se que o momento de inércia do cubo Ω em torno do eixo z é dada por*

$$I_z = \iiint_\Omega d^2(x, yz)\delta(x, y, z)dx\,dy\,dz$$

sendo

$$\delta(x, y, z) = x$$

e

$$d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

a densidade do cubo no ponto (x, y, z) e

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

Portanto

$$\begin{aligned} I_z &= \iiint_\Omega \left(x^2 + y^2\right) x\,dx\,dy\,dz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \left(x^3 + y^2 x\right) dx\,dy\,dz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{x^4}{4} + \frac{y^2 x^2}{2}\right) \Big|_0^1 dy\,dz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{4} + \frac{y^2}{2}\right) dy\,dz \\ &= \int_0^1 \left(\frac{y}{4} + \frac{y^3}{6}\right) \Big|_{0-}^1 dz \\ &= \int_0^1 \frac{5}{12} dz \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III - Turma M3

Profº. Edson

3ª Prova **2º Semestre** **2025**

Data: 11 de Dezembro **Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Calcule*

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\gamma$$

sendo

$$\mathbf{F}(x,y) = (x+3y)\mathbf{i} + (2x-y)\mathbf{j}$$

e γ é a curva dada pela equação $x^2 + 2y^2 = 2$, orientada no sentido antihorário.

Problema 2 *Calcule a **área** da região do plano limitado pela parábola $y = \sqrt{2}x^2$ e pela círcunferência de raio unitário centrado na origem.*

Problema 3 *Calcule a **área** da região da superfície da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está no primeiro octante, entre o plano $z = 0$ e o cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.*

Problema 4 *Calcule o **fluxo** do campo vetorial*

$$\mathbf{F}(x,y) = (y - 6x^2)\mathbf{i} + (x + y^2)\mathbf{j}$$

no sentido externo à curva correspondente à fronteira do triângulo formado pelas retas $y = 0$, $y = x$ e $x = 1$.

Problema 5 *Calcule*

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\gamma$$

sendo

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2 + z^2, y, 2xz)$$

e γ é a curva fechada correspondente à fronteira da região do plano $z = 4 - x - y$ que encontra-se no primeiro octante. Considere a orientação no sentido que desejar

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof$^{\text{o}}$. Edson

2$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito 3ª Prova **2025**
Data: Sexta-feira, 12 de Dezembro **Turma M3**

Exercício 1 *Observe que a equação que define a curva γ pode ser reescrita como*

$$x^2 + \left(\sqrt{2}y\right)^2 = 2$$

O que torna possível a seguinte parametrização para a mesma

$$\gamma : \begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases}, \; 0 \leq t \leq 2\pi$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\gamma &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}\left(\sqrt{2}\cos t, \operatorname{sen} t\right) \cdot \\
&\quad \cdot \left(-\sqrt{2}\operatorname{sen} t, \cos t\right)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{2}\cos t + 3\operatorname{sen} t, 2\sqrt{2}\cos t - \operatorname{sen} t\right) \cdot \\
&\quad \cdot \left(-\sqrt{2}\operatorname{sen} t, \cos t\right)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-3\cos t \operatorname{sen} t - 3\sqrt{2}\operatorname{sen}^2 t + \right. \\
&\quad \left. + 2\sqrt{2}\cos^2 t\right) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-3\cos t \operatorname{sen} t + \frac{5\sqrt{2}}{2}\cos 2t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) dt \\
&= -\frac{3}{2}\operatorname{sen}^2 t + \frac{5\sqrt{2}}{4}\operatorname{sen} 2t - \frac{\sqrt{2}}{2}t \Big|_0^{2\pi} \\
&= -\sqrt{2}\pi
\end{aligned}$$

■

Outro Modo: *Como γ é uma curva fechada e o campo vetorial* **F** *está definido em todo o seu interior Ω, o* ***Teorema de Green****, garante que*

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\gamma &= \iint_\Omega \operatorname{rot} \mathbf{F}\, dx\, dy \\
&= \iint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}(2x - 2) - \frac{\partial}{\partial y}(x + 3y)\right] dx\, dy \\
&= -\iint_\Omega dx\, dy \\
&= -\text{Área}(\Omega) \\
&= -\sqrt{2}\pi
\end{aligned}$$

Perceba que Ω é uma elipse de eixos 1e $\sqrt{2}$. ■

Exercício 2 *Observe inicialmente que a curva que corresponde à fronteira da região em questão é dada por*

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2,$$

sendo

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{2}t^2 \end{cases}, \; -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq t \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases}, \; \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{3\pi}{4}$$

Disto segue-se que a área que se deseja calcular é dada por

$$\begin{aligned}
A &= \int_\gamma x\, dy \\
&= \int_{\gamma_1} x\, dy + \int_{\gamma_2} x\, dy \\
&= \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 2\sqrt{2}t^2 dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos^2 t\, dt \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3}t^3 \Big|_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t\right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \\
&= \frac{1}{6} + \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

■

Outro modo: *Usando a* ***Integral de Riemann****, a área procurada é dada por*

$$A = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\sqrt{1-x^2} - \sqrt{2}x^2\right) dx$$

$$= \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2}dx - \frac{\sqrt{2}}{3}x^3\Big|_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= \left[\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{3}} \sqrt{1-x^2}dx\right] - \frac{1}{3}$$

Considere

$$x = \cos t$$

e observe que

$$dx = -\text{sen}\, t\, dt$$

e

$$x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t = \frac{3\pi}{4}$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$$

Assim,

$$A = \left[-\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \text{sen}^2\, t\, dt\right] - \frac{1}{3}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(t - \frac{\text{sen}\, 2t}{2}\right)\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{\pi}{4}$$

■

Exercício 3 *Uma parametrização possível para a região em questão pode ser dada por*

$$\sigma : \begin{cases} x = 2\,\text{sen}\, u \cos v \\ y = 2\,\text{sen}\, u\, \text{sen}\, v \\ z = 2\cos u \end{cases},$$

com

$$\Omega : \begin{cases} \frac{\pi}{4} \le u \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le v \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

e sua área, portanto, é

$$A = \iint_\sigma ds$$

$$= \iint_\Omega \left\| \frac{\partial\sigma}{\partial u} \times \frac{\partial\sigma}{\partial v} \right\| du\, dv$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 4\text{sen}\, u\, du\, dv$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -4\cos u \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dv$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{2}dv$$

$$= \sqrt{2}\pi$$

■

Exercício 4 *Observe que a curva em questão é dada por*

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$$

sendo

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}, \ 0 \le t \le 1$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases}, \ 0 \le t \le 1$$

$$-\gamma_3 : \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}, \ 0 \le t \le 1$$

Assim, o fluxo do campo $\mathbf{F}$ *através de* γ *é dado por*

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, ds = \int_{\gamma_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_1\, ds + \int_{\gamma_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_2\, ds + \int_{\gamma_3} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_3\, ds$$

$$= \int_0^1 \mathbf{F}(\gamma_1(t)) \cdot \frac{(0,-1)}{\|\gamma_1'(t)\|} \|\gamma_1'(t)\|\, dt +$$

$$+ \int_0^1 \mathbf{F}(\gamma_2(t)) \cdot \frac{(1,0)}{\|\gamma_2'(t)\|} \|\gamma_2'(t)\|\, dt -$$

$$- \int_0^1 \mathbf{F}(\gamma_3(t)) \cdot \frac{(1,-1)}{\|\gamma_3'(t)\|} \|\gamma_3'(t)\|\, dt$$

$$= \int_0^1 \mathbf{F}(t,0)\cdot(0,-1)\, dt +$$

$$+ \int_0^1 \mathbf{F}(1,t)\cdot(1,0)\, dt -$$

$$- \int_0^1 \mathbf{F}(t,t)\cdot(1,-1)\, dt$$

$$= \int_0^1 -t dt + \int_0^1 (t-6)dt + \int_0^1 7t^2\, dt$$

$$= \int_0^1 \left(7t^2 - 6\right) dt$$

$$= \frac{7}{3}t^3 - 6t \Big|_0^1$$

$$= -\frac{11}{3}$$

■

Outro Modo: *Como γ é uma curva fechada e o campo vetorial $\mathbf{F}$ está definido em todo o seu interior Ω, o **Teorema da Divergência de Gauss**, garante que*

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, ds = \iint_\Omega \operatorname{div}\mathbf{F}\, dx\, dy$$

$$= \iint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}(y - 6x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x + y^2)\right] dx\, dy$$

$$= \iint_\Omega (-12x + 2y)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^x (-12x + 2y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 -12xy + y^2 \Big|_0^x dx$$

$$= \int_0^1 \left(-12x^2 + x^2\right) dx$$

$$= -4x^3 + \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1$$

$$= -\frac{11}{3}$$

■

Exercício 5 *Observe inicialmente que a curva γ é dada por*

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$$

sendo

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = 4 - t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}, \ 0 \le t \le 4$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 - t \\ z = t \end{cases}, \ 0 \le t \le 4$$

$$\gamma_3 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 4 - t \end{cases}, \ 0 \le t \le 4$$

Logo,

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\gamma = \int_{\gamma_1} \mathbf{F}\cdot d\gamma + \int_{\gamma_2} \mathbf{F}\cdot d\gamma + \int_{\gamma_3} \mathbf{F}\cdot d\gamma$$

$$= \int_0^4 \mathbf{F}(\gamma_1(t))\cdot\gamma_1'(t)dt +$$
$$+ \int_0^4 \mathbf{F}(\gamma_2(t))\cdot\gamma_2'(t)dt +$$
$$+ \int_0^4 \mathbf{F}(\gamma_3(t))\cdot\gamma_3'(t)dt +$$

$$= \int_0^4 \left((4-t)^2, t, 0\right)\cdot(-1,1,0)dt +$$
$$+ \int_0^4 \left(t^2, 4-t, 0\right)\cdot(0,-1,1)dt +$$
$$+ \int_0^4 \left(t^2 + (4-t)^2, 0, 2t(4-t)\right)\cdot(1,0,-1)dt$$

$$= \int_0^4 \left(3t^2 - 6t - 4\right) dt$$

$$= 0$$

■

Outro Modo: *Observe inicialmente que*

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 + z^2 & y & 2xz \end{vmatrix}$$

$$= (0-0)\,\mathbf{i} - (2z - 2z)\,\mathbf{j} + (0-0)\,\mathbf{k}$$

$$= (0,0,0)$$

*Considere σ uma parametrização qualquer da região do plano que possui γ como fronteira. O **Teorema de Stokes** nos garante que*

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\gamma = \iint_\sigma \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, ds$$

$$= 0.$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III - Turma M3

Profº. Edson

Prova Final | **2º Semestre** | **2025**

Data: 18 de Dezembro | **Duração: 16:00 - 18:00**

Problema 1 *Calcule o* ***volume*** *do sólido delimitado pelo cilindro* $4x^2 + y^2 = 9$ *e pelos planos* $z = 0$ *e* $z = y + 3$.

Problema 2 *Calcule a integral*

$$\iiint_\Omega yz\,dx\,dy\,dz$$

sendo Ω *o sólido formado pelos pontos* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$*tais que* $0 \leq x + 2y \leq 2$, $0 \leq x - z \leq 2$ *e* $0 \leq 2y - z \leq 3$.

Problema 3 *Calcule o* ***trabalho*** *realizado pela força*

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{j}$$

ao mover uma partícula ao longo da curva $y = 1 + x^2$ *do ponto* $(-1, 2)$ *ao ponto* $(1, 2)$.

Problema 4 *Calcule o* ***fluxo*** *do campo vetorial*

$$\mathbf{F}(x, y) = (y - 6x^2)\mathbf{i} + (x + y^2)\mathbf{j}$$

no sentido externo à curva correspondente à fronteira do triângulo formado pelas retas $y = 0$, $y = x$ *e* $x = 1$.

Problema 5 *Calcule*

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\gamma$$

sendo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + z^2, y, 2xz)$$

e γ *é a curva fechada correspondente à fronteira da região do plano* $z = 4 - x - y$ *que encontra-se no primeiro octante. Considere a orientação no sentido que desejar*

Boa Sorte!

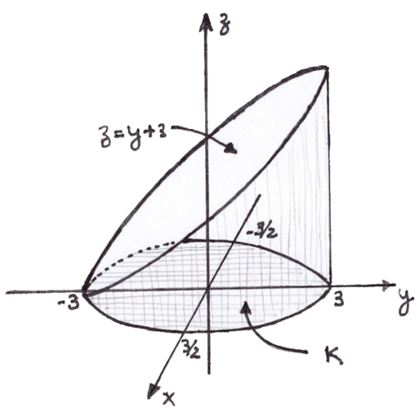
Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof$^{\text{o}}$. Edson

2$^{\text{o}}$ Semestre

Gabario Prova Final **2025**
Data: Sexta-feira, 19 de Dezembro **Turma M3**

Exercício 1 *Observe que o sólido Ω delimitado pelo cilindro $4x^2 + y^2 = 9$ e os planos $z = 0$ e $z = y + 3$ possui o seguinte esboço*



Assim, segue-se que o volume V deste sólido é dado por

$$V = \iint_K (y+3)dx\,dy$$

onde K é o conjuntos dos pontos (x, y) tais que

$$4x^2 + y^2 \leq 9 \Leftrightarrow \left(\frac{2x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 \leq 1$$

Usando coordenadas polares, tome

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} r \cos\theta \\ y = 3r \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

cujo jacobiano é

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{3}{2}\cos\theta & -\frac{3}{2} r \operatorname{sen}\theta \\ 3\operatorname{sen}\theta & 3r\cos\theta \end{vmatrix} = \frac{9}{2} r$$

Assim, neste novo sistema de coordenadas, o conjunto K pode ser descrito do seguinte modo

$$K : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$$

e, portanto, segue-se que

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (3r \operatorname{sen}\theta + 3) \frac{9}{2} r \, dr \, d\theta \\ &= \frac{27}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(r^2 \operatorname{sen}\theta + r\right) dr \, d\theta \\ &= \frac{27}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3} r^3 \operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2} r^2\right)\Bigg|_0^1 d\theta \\ &= \frac{27}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3}\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2}\right) d\theta \\ &= \frac{27}{2} \left(-\frac{1}{3}\cos\theta + \frac{1}{2}\theta\right)\Bigg|_0^{2\pi} \\ &= \frac{27\pi}{2} \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Considere a seguinte* ***mudança de variáveis***

$$\varphi^{-1} : \begin{cases} u = x + 2y \\ v = x - z \\ w = 2y - z \end{cases}$$

Ou seja,

$$\varphi : \begin{cases} x = \dfrac{u + v - w}{2} \\ y = \dfrac{u - v + w}{4} \\ z = \dfrac{u - v - w}{2} \end{cases}$$

cujo jacobiano é dado por

$$|J| = \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right| = \frac{1}{4}$$

e neste referencial o conjunto Ω torna-se

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq u \leq 2 \\ 0 \leq v \leq 2 \\ 0 \leq w \leq 3 \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega} yz\,dx\,dy\,dz \\ &= \iiint_{\Omega_2} \left(\frac{u-v+w}{4}\right)\left(\frac{u-v-w}{2}\right)|J|\,du\,dv\,dw \\ &= \frac{1}{32}\int_0^2\int_0^2\int_0^3 (u-v+w)(u-v-w)\,dw\,dv\,du \\ &= -\frac{7}{8} \end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Considere*

$$P(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$Q(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Observe que

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= \frac{-y\left(\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)2x}{x^2+y^2} \\ &= \frac{-2xy}{2\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)(x^2+y^2)} \\ &= \frac{-xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) &= \frac{-x\left(\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)2y}{x^2+y^2} \\ &= \frac{-2xy}{2\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)(x^2+y^2)} \\ &= \frac{-xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y), \forall (x,y) \neq (0,0)$$

Assim, considerando

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, y > 0 \right\},$$

como Ω é simplesmente conexo (não tem "buracos") e $(0,0) \notin \Omega$, podemos afirmar que o campo vetorial

$$F(x,y) = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$$

é conservativo em Ω. Portanto, o trabalho realizado por F para deslocar uma partícula do ponto $(-1,2)$ ao ponto $(1,2)$ é independente do caminho escolhido. Sendo assim, tomemos γ sendo o segmento de reta que une os pontos $(-1,2)$ e $(1,2)$, ou seja

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 2 \end{cases}, -1 \leq t \leq 1$$

Com isto, chamando de τ o trabalho que desejamos calcular, teremos que

$$\begin{aligned} \tau &= \int_{\gamma} F \cdot d\gamma \\ &= \int_{-1}^{1} F(\gamma(t)) \cdot (1,0)dt \\ &= \int_{-1}^{1} \left(\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}, \frac{2}{\sqrt{t^2+4}}\right) \cdot (1,0)dt \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{t^2+4}}dt \end{aligned}$$

Para resolver esta última integral, tome

$$u = t^2 + 4$$

e observe que

$$du = 2tdt$$

$$t = -1 \Rightarrow u = 5$$

$$t = 1 \Rightarrow u = 5$$

Assim,

$$\begin{aligned} \tau &= \int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{t^2+4}}dt \\ &= \int_5^5 \frac{du}{2\sqrt{u}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Observe que a curva em questão é dada por*

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$$

sendo

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}, \ 0 \le t \le 1$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases}, \ 0 \le t \le 1$$

$$-\gamma_3 : \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}, \ 0 \le t \le 1$$

Assim, o fluxo do campo $\mathbf{F}$ *através de* γ *é dado por*

$$\begin{aligned}\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds &= \int_{\gamma_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_1\,ds + \int_{\gamma_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_2\,ds + \int_{\gamma_3} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_3\,ds \\
&= \int_0^1 \mathbf{F}(\gamma_1(t))\cdot\frac{(0,-1)}{\|\gamma_1'(t)\|}\,\|\gamma_1'(t)\|\,dt + \\
&\quad + \int_0^1 \mathbf{F}(\gamma_2(t))\cdot\frac{(1,0)}{\|\gamma_2'(t)\|}\,\|\gamma_2'(t)\|\,dt - \\
&\quad - \int_0^1 \mathbf{F}(\gamma_3(t))\cdot\frac{(1,-1)}{\|\gamma_3'(t)\|}\,\|\gamma_3'(t)\|\,dt \\
&= \int_0^1 \mathbf{F}(t,0)\cdot(0,-1)\,dt + \\
&\quad + \int_0^1 \mathbf{F}(1,t)\cdot(1,0)\,dt - \\
&\quad - \int_0^1 \mathbf{F}(t,t)\cdot(1,-1)\,dt \\
&= \int_0^1 -t\,dt + \int_0^1 (t-6)dt + \int_0^1 7t^2\,dt \\
&= \int_0^1 \left(7t^2 - 6\right) dt \\
&= \frac{7}{3}t^3 - 6t\Big|_0^1 \\
&= -\frac{11}{3}\end{aligned}$$

■

Outro Modo: *Como* γ *é uma curva fechada e o campo vetorial* $\mathbf{F}$ *está definido em todo o seu interior* Ω*, o* ***Teorema da Divergência de Gauss****, garante que*

$$\begin{aligned}\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds &= \iint_\Omega \operatorname{div}\mathbf{F}\,dx\,dy \\
&= \iint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}(y-6x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x+y^2)\right] dx\,dy \\
&= \iint_\Omega (-12x+2y)\,dx\,dy \\
&= \int_0^1\int_0^x (-12x+2y)\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 -12xy + y^2\Big|_0^x\,dx \\
&= \int_0^1 \left(-12x^2 + x^2\right) dx \\
&= -4x^3 + \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 \\
&= -\frac{11}{3}\end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Observe inicialmente que a curva* γ *é dada por*

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$$

sendo

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = 4-t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}, \ 0 \le t \le 4$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 4-t \\ z = t \end{cases}, \ 0 \le t \le 4$$

$$\gamma_3 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 4-t \end{cases}, \ 0 \le t \le 4$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\gamma &= \int_{\gamma_1}\mathbf{F}\cdot d\gamma + \int_{\gamma_2}\mathbf{F}\cdot d\gamma + \int_{\gamma_3}\mathbf{F}\cdot d\gamma \\
&= \int_0^4 \mathbf{F}(\gamma_1(t))\cdot\gamma_1'(t)dt + \\
&\quad + \int_0^4 \mathbf{F}(\gamma_2(t))\cdot\gamma_2'(t)dt + \\
&\quad + \int_0^4 \mathbf{F}(\gamma_3(t))\cdot\gamma_3'(t)dt + \\
&= \int_0^4 \Big((4-t)^2, t, 0\Big)\cdot(-1,1,0)dt + \\
&\quad + \int_0^4 \Big(t^2, 4-t, 0\Big)\cdot(0,-1,1)dt + \\
&\quad + \int_0^4 \Big(t^2+(4-t)^2, 0, 2t(4-t)\Big)\cdot(1,0,-1)dt \\
&= \int_0^4 \Big(3t^2-6t-4\Big)\,dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

■

Outro Modo: *Observe inicialmente que*

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2+z^2 & y & 2xz \end{vmatrix} \\
&= (0-0)\,\mathbf{i} - (2z-2z)\,\mathbf{j} + (0-0)\,\mathbf{k} \\
&= (0,0,0)
\end{aligned}$$

Considere σ uma parametrização qualquer da região do plano que possui γ como fronteira. O ***Teorema de Stokes*** *nos garante que*

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\gamma &= \iint_\sigma \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds \\
&= 0.
\end{aligned}$$

■