

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Coelgiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof^o. Edson

3^a Prova

1^o Semestre

2007

Data: Quarta-feira, 12 de Junho de 2007

Duração: 13:00 - 15:00

Problema 1 Um campo escalar φ que nunca é zero possui as seguintes propriedades

$$\|\nabla\varphi\|^2 = 4\varphi \text{ e } \operatorname{div}(\varphi\nabla\varphi) = 10\varphi$$

Calcule a integral de superfície

$$\iint_S \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS$$

onde S é a superfície de uma esfera unitária com centro na origem e $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ é a derivada direcional de φ na direção do vetor n normal unitário exterior a S .

Problema 2 Sejam f e g campos escalares de classe C^2 sobre um conjunto aberto S do plano. Seja R uma região contida em S , cuja fronteira é uma curva γ contínua por partes. Prove as seguintes identidades

a). $\oint_{\gamma} \frac{\partial g}{\partial n} d\gamma = \iint_R \nabla^2 g dx dy$; onde $\nabla^2 g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

b). $\oint_{\gamma} f \frac{\partial g}{\partial n} d\gamma = \iint_R (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) dx dy$.

Problema 3 Uma esfera está inscrita num cilindro circular reto. A esfera é cortada por dois planos paralelos perpendiculares ao eixo do cilindro. Mostre que a porção da esfera e do cilindro que está entre os planos possuem áreas iguais.

Problema 4 Calcule o fluxo para fora, do campo vetorial

$$F(x, y, z) = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

através do elipsóide $4x^2 + 9y^2 + 6z^2 = 36$.

Problema 5 Calcule $\oint_C F \cdot dr$ onde $F(x, y, z) = xy\vec{i} + yz\vec{j} + zx\vec{k}$ e C é o triângulo com vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ orientado no sentido anti-horário quando visto de cima.

Boa sorte!