

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Prof. Edson

1º Semestre

Gabarito Prova Final
Data: Segunda-feira, 09 de Dezembro de 2024

2024
Turma X1

Exercício 1

a).

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - 1}{1 - x} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{1 - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1 - x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

□

b).

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^2}{\sqrt[3]{5x^6 - 1}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^2}{\sqrt[3]{x^6(5 - \frac{1}{x^6})}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^2}{x^2 \sqrt[3]{5 - \frac{1}{x^6}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6}{\sqrt[3]{5 - \frac{1}{x^6}}} \\ &= \frac{6}{\sqrt[3]{5}} \end{aligned}$$

■

Exercício 2 De acordo com o enunciado,

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} H(x - 2) &= \begin{cases} 0, & \text{se } x - 2 < 0 \\ 1, & \text{se } x - 2 \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } x < 2 \\ 1, & \text{se } x \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} f(x) &= H(x)\sqrt{x} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } x < 2 \\ \sqrt{x}, & \text{se } x \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Analisando a continuidade da função, tem-se que

- Quando $x < 2$, $f(x) = 0$. Portanto f é contínua nesse intervalo.
- Quando $x > 2$, $f(x) = \sqrt{x}$ que é uma função contínua nesse intervalo.
- Quando $x = 2$, tem-se

- $f(2) = \sqrt{2}$, ou seja $f(2)$ existe
- Calculando os limites laterais

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Como tais limites são diferentes, segue-se que

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \nexists$$

Ou seja, f não é contínua em $x = 2$ que é seu único ponto de descontinuidade.

■

Exercício 3 Precisamos inicialmente calcular a derivada da função

$$f(x) = e^x g(3x + 1)$$

Para isto, considere

$$h(x) = 3x + 1$$

e

$$p(x) = g(3x + 1)$$

Observe então que

$$p(x) = g(h(x))$$

Portanto, usando a **regra da cadeia**, teremos

$$\begin{aligned} p'(x) &= g'(h(x))h'(x) \\ &= 3g'(3x + 1) \end{aligned}$$

Observe agora que

$$f(x) = e^x p(x)$$

e usando a regra de derivação do produto teremos

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x p(x) + e^x p'(x) \\ &= e^x [p(x) + p'(x)] \\ &= e^x [g(3x + 1) + 3g'(3x + 1)] \end{aligned}$$

Donde segue-se que

$$f'(0) = e^0 [g(1) + 3g'(1)]$$

Como sabemos que $g(1) = 2$ e $g'(1) = 3$, segue-se que

$$f'(0) = 2 + 3 \cdot 3 = 11$$

■

Exercício 4

a).

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{x^2+1}{x} \right) dx &= \int \left(x + \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} + \ln|x| + k \end{aligned}$$

onde $k \in \mathbb{R}$

□

b). Tome

$$y = x + 1$$

e observe que

$$\begin{aligned} dy &= dx \\ x = -1 &\Rightarrow y = 0 \\ x = 0 &\Rightarrow y = 1 \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 x(x+1)^{100} dx &= \int_0^1 (y-1)y^{100} dy \\ &= \int_0^1 (y^{101} - y^{100}) dy \\ &= \left. \frac{y^{102}}{102} - \frac{y^{101}}{101} \right|_0^1 \\ &= \frac{1}{102} - \frac{1}{101} \\ &= \frac{-1}{10302} \end{aligned}$$

■

Exercício 5 Seja $P = (a, b)$ um ponto qualquer sobre o gráfico de $y = x^3$, ou seja

$$b = a^3$$

A distância entre o ponto P e o ponto $(4, 0)$ é dada por

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(a-4)^2 + (b-0)^2} \\ &= \sqrt{(a-4)^2 + a^6} \\ &= \sqrt{a^6 + a^2 - 8a + 16} \end{aligned}$$

Considere a função

$$g(a) = a^6 + a^2 - 8a + 16$$

e observe que, minimizando a função g , estamos também minimizando a função d . Para isto, perceba que

$$g'(a) = 6a^5 + 2a - 8$$

e nossos candidatos a extremos são obtidos como solução da seguinte equação

$$g'(a) = 0 \Rightarrow$$

$$6a^5 + 2a - 8 = 0 \Rightarrow$$

$$3a^5 + a - 4 = 0$$

Donde segue-se que $a = 1$ é a única raiz real e, portanto nosso único candidato. Para confirmarmos que de fato trata-se de um ponto de mínimo para a função g , observe que

$$g''(a) = 30a^4 + 2 > 0, \forall a \in \mathbb{R}$$

Com isto, temos que $b = 1$ e o ponto procurado é $(1, 1)$. ■