Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Prof^o. Edson

1^o Semestre

Gabarito 3ª Prova **2024**
Data: Quinta-feira, 05 de Dezembro de 2024 **Turma X1**

Exercício 1 *Sendo*

$$f(x) = (1000 - x)^2 + x^2$$

Segue-se, que

$$f'(x) = -2\,(1000 - x) + 2x$$

$$= 4x - 2000$$

Realizando o estudo de sinal de f', tem-se que

- $f'(x) > 0$ *para* $x > 500$
- $f\prime(x) < 0$ *para* $x < 500$

Ou seja, f é decrescente para $x \in (-\infty, 500)$.
Observe ainda que

$$f(200) = 800^2 - 200^2$$
$$f(400) = 600^2 - 400^2$$

Logo, como f é ***decrescente*** *no intervalo $(-\infty, 500)$, segue-se que $f(200) > f(400)$, ou, dito de outro modo*

$$800^2 - 200^2 > 600^2 - 400^2$$

■

Exercício 2 *Inicialmente observe que*

$$f'(x) = \frac{-(x^2+3x) - (1-x)(2x+3)}{(x^2+3x)^2}$$
$$= \frac{x^2 - 2x - 3}{(x^2+3x)^2}$$

Logo, os candidatos a extremos de f são obtidos como soluções da equação

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

Ou seja $x = 3$ e $x = -1$. Para a classificação destes pontos, perceba agora que

$$f''(x) = \frac{2x\left(-x^4 + 18x^2 + 36x + 27\right)}{(x^2+3x)^4}$$

e

$$f''(3) = \frac{1}{81} > 0$$
$$f''(-1) = -1 < 0$$

Assim, $x = 3$ é um ponto de ***mínimo*** *global e $x = -1$ é um ponto de* ***máximo*** *global.* ■

Exercício 3 *Considere x e y sendo as dimensões do retângulo que deseja-se encontrar. Como serão necessários apenas 3 lados desse retângulo, o gasto com a cerca corresponde à soma dos comprimentos destes lados, ou seja*

$$C = 2x + y$$

Além disso, a área deve ser de $8km^2$,

$$xy = 8 \Rightarrow y = \frac{8}{x}$$

Portanto,

$$C(x) = 2x + \frac{8}{x}$$

e

$$C'(x) = 2 - \frac{8}{x^2}$$

O candidatos a extremos da função C são obtidos como solução da equação

$$C'(x) = 0 \Rightarrow 2 - \frac{8}{x^2} = 0$$

Donde segue-se que $x = 2$. Observe que

$$C''(x) = \frac{16}{x^3}$$

e

$$C''(2) = 2 > 0$$

Logo $x = 2$ é de fato um ponto de ***mínimo*** *da função, e as dimensões do retângulo procurado são $x = 2$ e $y = 4$.* ■

Exercício 4

a). Considere

$$w = \sqrt{t}$$

e observe que

$$dw = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$$
$$= \frac{1}{2w}dt \Rightarrow$$

$$2wdw = dt$$

Portanto

$$\int \frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt = \int \frac{\cos w}{w} 2w\,dw$$
$$= 2\int \cos w\,dw$$
$$= 2\text{sen}\, w + k$$
$$= 2\text{sen}\,\sqrt{t} + k,\ k \in \mathbb{R}$$

□

b). Considere

$$v = x^4 + 4x$$

e observe que

$$dv = \left(4x^3 + 4\right) dx$$
$$= 4\left(x^3 + 1\right) dx \Rightarrow$$
$$\frac{dv}{4} = \left(x^3 + 1\right) dx$$

Portanto

$$I = \int \left(x^3 + 1\right) \cos\left(x^4 + 4x\right) dt$$
$$= \int \cos v\, \frac{dv}{4}$$
$$= \frac{1}{4}\int \cos v\,dv$$
$$= \frac{1}{4}\text{sen}\, v + k$$
$$= \frac{1}{4}\text{sen}\,\left(x^4 + 4x\right) + k,\ k \in \mathbb{R}$$

■

Exercício 5 *Calculando a interseção entre os gráficos de*

$$f(x) = x^3 - 10x$$

e

$$g(x) = 6x$$

Obtêm-se

$$x^3 - 10x = 6x \Rightarrow$$
$$x^3 - 16x = 0 \Rightarrow$$
$$x\left(x^2 - 16\right) = 0$$

Ou seja, $x = -4$, $x = 0$ e $x = 4$. Logo a área que deseja-se calcular é dada por

$$A = \left|\int_{-4}^{0} [f(x) - g(x)]\,dx\right| + \left|\int_{0}^{4} [f(x) - g(x)]\,dx\right|$$
$$= \left|\int_{-4}^{0} \left(x^3 - 16x\right) dx\right| + \left|\int_{0}^{4} \left(x^3 - 16x\right) dx\right|$$
$$= \left|\left(\frac{x^4}{4} - 8x^2\right)\Big|_{-4}^{0}\right| + \left|\left(\frac{x^4}{4} - 8x^2\right)\Big|_{0}^{4}\right|$$
$$= 128$$

■