

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Profº. Edson

1º Semestre

Gabarito 2ª Prova
Data: Sexta-feira, 1 de Novembro de 2024

2024
Turma X1

Exercício 1

a). Sendo

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Segue-se, da **regra do quociente** que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \cdot \sqrt{1-x^2} - x \left(\sqrt{1-x^2} \right)'}{\left(\sqrt{1-x^2} \right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{1-x^2} - x \left(\sqrt{1-x^2} \right)'}{1-x^2} \end{aligned}$$

e, pela **regra da cadeia**, tem-se que

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{1-x^2} \right)' &= \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sqrt{1-x^2} - x \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \right)}{1-x^2} \\ &= \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{1-x^2} \\ &= \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

b). Sabendo que

$$f(x) = x^4 - \ln(x^4 + 1)$$

tem-se que

$$f'(x) = 4x^3 - \left[\ln(x^4 + 1) \right]'$$

e, pela **regra da cadeia**,

$$\left[\ln(x^4 + 1) \right]' = \frac{4x^3}{x^4 + 1}$$

Logo

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - \frac{4x^3}{x^4 + 1} \\ &= \frac{4x^7 + 4x^3 - 4x^3}{x^4 + 1} \\ &= \frac{4x^7}{x^4 + 1} \end{aligned}$$

Exercício 2 Inicialmente observe que

$$f'(x) = 2ax + b$$

Sabemos que o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(2,7)$ é

$$f'(2) = 4a + b$$

Por outro lado, é dito no enunciado que tal coeficiente é $m = 12$, ou seja

$$f'(2) = m \Leftrightarrow 4a + b = 12$$

Como o gráfico da função passa pelo ponto $(2,7)$, segue-se que

$$f(2) = 7 \Rightarrow 4a + 2b = 7$$

Tem-se portanto sistema

$$\begin{cases} 4a + b = 12 \\ 4a + 2b = 7 \end{cases}$$

Donde segue-se que

$$\begin{cases} a = \frac{17}{4} \\ b = -5 \end{cases}$$

Exercício 3

a). Observe que

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \sec x &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \frac{1}{\cos x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\cos x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{-1}{-\sin x} \text{ (por L'Hospital) } \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

□

b). Observe que

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1) \ln x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\ln x + (x-1) \frac{1}{x}} \\
 &\quad \text{(por L'Hospital)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-x}{x \ln x + x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{\ln x + 2} \\
 &\quad \text{(por L'Hospital)} \\
 &= -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

■

Exercício 4 Sabe-se que

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$$

Logo, quando $x = 4$, tem-se

$$2 + \sqrt{y} = 3 \Rightarrow y = 1$$

Além disso, admitindo $y(x)$ e derivando implicitamente a equação dada, em relação a x , tem-se

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{dy}{dx} = 0$$

Ou seja,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

e

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=4} = -\frac{1}{2}$$

■

Exercício 5 Sabe-se que o cone de altura h e raio r possui volume

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

e, por semelhança de triângulo, o cone formado pela água contida no cone de altura 12m e raio 6m, quando a água estiver no nível de altura h , terá raio

$$r = \frac{h}{2}$$

Ou seja, seu volume é dado por

$$V = \frac{1}{12} \pi h^3$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \frac{dV}{dt} &= \frac{1}{12} \pi \cdot 3h^2 \frac{dh}{dt} \\
 &= \frac{1}{4} \pi h^2 \frac{dh}{dt}
 \end{aligned}$$

Sabendo que

$$\frac{dV}{dt} = -2m^3/2,$$

no instante em que $h = 3$, tem-se

$$-2 = \frac{1}{4} \pi \cdot 9 \frac{dh}{dt}$$

Ou seja

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{8}{9\pi} \text{ m/s}$$

■