Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Prof^o. Edson

2^o Semestre

Gabarito Prova Final **2018**
Data: Quinta-feira, 28 de Março **Turma PX**

Exercício 1

a).
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{\text{sen }x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen }x-x^2}{x\text{sen }x}$$
Observe que
$$\text{sen }x-x^2\to 0 \textit{ quando } x\to 0$$
e
$$x\text{sen }x\to 0 \textit{ quando } x\to 0$$
Assim, usando a Regra de L'Hospital, temos
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{\text{sen }x}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen }x-x^2}{x\text{sen }x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-2x}{\text{sen }x+x\cos x}\end{aligned}$$
Agora, observe que
$$x\to 0^+\Rightarrow \text{sen }x+x\cos x\to 0^+$$
e
$$x\to 0^-\Rightarrow \text{sen }x+x\cos x\to 0^-$$
Portanto
$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{\text{sen }x}\right)=+\infty$$
e
$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{\text{sen }x}\right)=-\infty$$
Logo,
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{\text{sen }x}\right)=\nexists$$
□

b). Observe que
$$\sqrt[3]{x+2}-1\to 0 \textit{ quando } x\to -1$$
e
$$x+1\to 0 \textit{ quando } x\to -1$$
*Assim, usando a **Regra de L'Hospital**, temos*
$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x+2}-1}{x+1} &= \lim_{x\to -1}\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+2)^2}}\\ &= \tfrac{1}{3}\end{aligned}$$
■

Exercício 2 *Sabendo-se que*
$$F(x)=f(g(x))$$
*segue-se da **regra da cadeia** que*
$$F'(x)=f'(g(x))g'(x)$$
Como
$$f'(x)=\frac{x}{x^2+1}$$
e
$$g(x)=\sqrt{3x-1}$$
Tem-se que
$$\begin{aligned}f'(g(x)) &= \frac{g(x)}{(g(x))^2+1}\\ &= \frac{\sqrt{3x-1}}{3x-1+1}\\ &= \frac{\sqrt{3x-1}}{3x}\end{aligned}$$
e
$$g'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$$
Portanto
$$\begin{aligned}F'(x) &= \frac{\sqrt{3x-1}}{3x}\frac{3}{2\sqrt{3x-1}}\\ &= \frac{1}{2x}\end{aligned}$$
■

Exercício 3 *Seja (x_0, y_0) o ponto sobre o gráfico da função $y=e^{3x}$ no qual a reta tangente passa pela origem. A inclinação desta reta é data por*
$$m=\frac{dy}{dx}(x_0)$$
onde
$$\frac{dy}{dx}=3e^{3x}$$

ou seja,

$$m = 3e^{3x_0}$$

e, como (x_0, y_0) *pertençe ao gráfico de* f*, tem-se também que*

$$y_0 = e^{3x_0}$$

Portanto a equação da reta procurada, em função de x_0 *e* y_0 *é dada por*

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

ou seja

$$y = 3e^{3x_0}x + e^{3x_0}(1 - 3x_0)$$

Como esta reta deve para pela origem, segue-se que

$$0 = e^{3x_0}(1 - 3x_0) \Rightarrow 1 - 3x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{3}$$

e o ponto que procurado é

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{3}, e\right)$$

■

Exercício 4 *De acordo com o enunciado do problema as variáveis* x *e* y *mudam com tempo. Além disso, é dado que*

$$y = 2x^2 + 3x - 1$$

Então, derivando em ambos os lados desta equação em relação o tempo, tem-se

$$\frac{dy}{dt} = (4x + 3)\,\frac{dx}{dt}$$

Como

$$\frac{dx}{dt} = 6\,u/\min$$

quando o objeto está no ponto $(0, -1)$*, ou seja quando* $x = 0$ *e* $y = -1$*, segue-se*

$$\frac{dy}{dt} = (4 \cdot 0 + 3)\,6$$

$$= 18\,u/\min$$

■

Exercício 5 *Seja* $P = (a, b)$ *um ponto qualquer sobre o gráfico de* $y = x^3$*, ou seja*

$$b = a^3$$

A distância entre o ponto P *e o ponto* $(4, 0)$ *é dada por*

$$\mathbf{d} = \sqrt{(a-4)^2 + (b-0)^2}$$

$$= \sqrt{(a-4)^2 + a^6}$$

$$= \sqrt{a^6 + a^2 - 8a + 16}$$

Considere a função

$$\mathbf{g}(a) = a^6 + a^2 - 8a + 16$$

e observe que, minimizando a função $\mathbf{g}$*, estamos também minimizando a função* $\mathbf{d}$*. Para isto, perceba que*

$$\mathbf{g}'(a) = 6a^5 + 2a - 8$$

e nossos candidatos a extremos são obtidos como solução da seguinte equação

$$\mathbf{g}'(a) = 0 \Rightarrow$$

$$6a^5 + 2a - 8 = 0 \Rightarrow$$

$$3a^5 + a - 4 = 0$$

Donde segue-se que $a = 1$ *é a única raíz real e, portanto nosso único candidato. Para confirmarmos que de fato trata-se de um ponto de mínimo para a função* $\mathbf{g}$*, observe que*

$$\mathbf{g}''(a) = 30a^4 + 2 > 0, \forall a \in \mathbb{R}$$

Com isto,temos que $b = 1$ *e o ponto procurado é* $(1, 1)$*.* ■