

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Prof^o. Edson

2º Semestre

Gabarito 3ª Prova
Data: Terça-feira, 26 de Março

2018
Turma PX

Exercício 1

a). Observe que

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + x)^{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(e^x + x)}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x} \ln(e^x + x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(e^x + x)}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\frac{e^x + 1}{e^x + x}}{1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{e^x + 1}{e^x + x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{e^x}{e^x + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{e^x}{e^x}} \\ &= e \end{aligned}$$

□

b). Observe que

$$\begin{aligned} B &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{1+x}} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

■

Exercício 2 Sabe-se que

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$$

Derivando implicitamente esta equação em relação a x , tem-se

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{dy}{dx} = 0$$

Ou seja,

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{y}{x}}$$

Voltando à equação dada no problema e substituindo $x = 4$, obtém-se

$$\sqrt{4} + \sqrt{y} = 3 \Rightarrow y = 1$$

Portanto

$$\frac{dy}{dx}(4) = -\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}$$

■

Exercício 3 Considere $V(h)$ o volume de água dentro do cilindro quando a coluna de água possui altura h . Segue-se que

$$V(h) = 25\pi h$$

Portanto,

$$\frac{dV}{dt} = 25\pi \frac{dh}{dt}$$

Como é a água é colocada dentro do cilindro a uma taxa de $25\text{m}^3/\text{h}$, segue-se que

$$\frac{dV}{dt} = 25\text{m}^3/\text{h}$$

Assim, tem-se

$$25 = 25\pi \frac{dh}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi} \text{m/h}$$

Como o tanque possui 10m de altura segue-se que levará 10π horas para enchê-lo totalmente. ■

Exercício 4 Sendo

$$f(x) = \frac{4x}{x^2 + 4},$$

segue-se que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4(x^2 + 4) - 4x(2x)}{(x^2 + 4)^2} \\ &= \frac{4(-x^2 + 4)}{(x^2 + 4)^2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \frac{4(-2x)(x^2+4)^2 - 4(-x^2+4)2(x^2+4)2x}{(x^2+4)^4} \\
 &= (x^2+4) \left[\frac{-8x(x^2+4) - 16x(-x^2+4)}{(x^2+4)^4} \right] \\
 &= \frac{-8x^3 - 32x + 16x^3 - 64x}{(x^2+4)^3} \\
 &= \frac{8x^3 - 96x}{(x^2+4)^3} \\
 &= \frac{(x^2-12)8x}{(x^2+4)^3}
 \end{aligned}$$

Para encontrar os candidatos a extremos de f é necessário resolver a seguinte equação

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 0 \Rightarrow \\
 \frac{4(-x^2+4)}{(x^2+4)^2} &= 0
 \end{aligned}$$

Donde segue-se que $x = 2$ ou $x = -2$ são os únicos candidatos a extremos de f . Para classificá-los é necessário avaliar o sinal de f'' em cada um destes valores, ou seja

$$\begin{aligned}
 f''(2) &= -\frac{128}{8^3} < 0 \\
 f''(-2) &= \frac{128}{8^3} > 0
 \end{aligned}$$

Assim, pode-se concluir que $x = 2$ é um ponto de máximo local (e global) e $x = -2$ é ponto de mínimo local (e global) da função f . ■

Exercício 5 Um ponto sobre a curva $y = x^2 + x$ possui coordenadas

$$P = (a, a^2 + a)$$

e, a distância de P ao ponto $Q = (7, 0)$ é dada por

$$\begin{aligned}
 d &= \sqrt{(7-a)^2 + (a^2+a-0)^2} \\
 &= \sqrt{49 - 14a + a^2 + a^4 + 2a^3 + a^2} \\
 &= \sqrt{a^4 + 2a^3 + 2a^2 - 14a + 49}
 \end{aligned}$$

Para minimizar a distância d , é suficiente minimizar a função

$$f(a) = a^4 + 2a^3 + 2a^2 - 14a + 49$$

Observe que

$$\begin{aligned}
 f'(a) &= 4a^3 + 6a^2 + 4a - 14 \\
 f''(a) &= 12a^2 + 12a + 4
 \end{aligned}$$

Assim, os candidatos a extremo de f são soluções da equação

$$\begin{aligned}
 f'(a) &= 0 \Rightarrow \\
 4a^3 + 6a^2 + 4a - 14 &= 0
 \end{aligned}$$

Ou seja, $a = 1$ é o único candidato real a extremo de f . Observe agora que

$$f''(1) = 28 > 0$$

Logo, $a = 1$ é um ponto de mínimo da função f . Portanto $P = (1, 2)$ é o ponto sobre a curva $y = x^2 + x$ que está mais próximo do ponto $Q = (7, 0)$. ■