Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Prof$^{\text{o}}$. Edson

2$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito 2$^{\text{a}}$ Prova **2018**
Data: Quinta-feira, 28 de Fevereiro **Turma PX**

Exercício 1

a). *Observe que*

$$
\begin{aligned}
A &= \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{2+3x-x^2}{1+8x^2}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2\left(\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x}-1\right)}{x^2\left(\frac{1}{x^2}+8\right)}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x}-1}{\frac{1}{x^2}+8}} \\
&= \sqrt[3]{\frac{-1}{8}} \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$\square$

b). *Observe que*

$$
\begin{aligned}
B &= \lim_{t\to-\infty} \frac{5-2t^3}{t^2+1} \\
&= \lim_{t\to-\infty} \frac{t^2\left(\dfrac{5}{t^2}-2t\right)}{t^2\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)} \\
&= \lim_{t\to-\infty} \frac{\dfrac{5}{t^2}-2t}{1+\dfrac{1}{t^2}} \\
&= +\infty
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Exercício 2 *Considere*

$$X = \sqrt{x^2+ax} + \sqrt{x^2+bx}$$

Observe que

$$
\begin{aligned}
C &= \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+ax} - \sqrt{x^2+bx}\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+ax} - \sqrt{x^2+bx}\right)\frac{X}{X} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+ax-x^2-bx}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2+bx}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{(a-b)\,x}{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{a}{x}\right)}+\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{b}{x}\right)}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{(a-b)\,x}{x\sqrt{1+\dfrac{a}{x}}+x\sqrt{1+\dfrac{b}{x}}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{(a-b)\,x}{\left(\sqrt{1+\dfrac{a}{x}}+\sqrt{1+\dfrac{b}{x}}\right)x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{a-b}{\sqrt{1+\dfrac{a}{x}}+\sqrt{1+\dfrac{b}{x}}} \\
&= \frac{a-b}{2}
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Exercício 3 *Observe que*

$$
\begin{aligned}
D &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{\frac{1+x}{x}}\right)^x \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1^x}{\left(\frac{1+x}{x}\right)^x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} \\
&= \frac{1}{e}
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Exercício 4

a). *Para calcular a derivada da função*

$$f(x) = \sqrt{x}\,\mathrm{tg}^3\sqrt{x}$$

Considere

$$u = \sqrt{x}$$

$$v = \mathrm{tg}\,u$$

$$w = v^3$$

Segue-se disto que

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{dv}{du} = \sec^2 u$$

$$\frac{dw}{dv} = 3v^2$$

*e, usando a **regra da cadeia** na forma de Leibnitz, tem-se que*

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dx} &= \frac{dw}{dv}\frac{dv}{du}\frac{du}{dx} \\ &= 3v^2\sec^2 u\frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{3\mathrm{tg}^2\sqrt{x}\sec^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

Observe que

$$f(x) = u \cdot w$$

*e, pela **regra do produto**, segue-se que*

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{du}{dx}\cdot w + u\cdot\frac{dw}{dx} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{tg}^3\sqrt{x} + \sqrt{x}\frac{3\mathrm{tg}^2\sqrt{x}\sec^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{\mathrm{tg}^3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{3\mathrm{tg}^2\sqrt{x}\sec^2\sqrt{x}}{2}\end{aligned}$$

□

b). *Deseja-se calcular a derivada da função*

$$g(x) = \log_3\sqrt{x+1}$$

Para isto, considere

$$u = x + 1$$

$$v = \sqrt{u}$$

$$\begin{aligned}g &= \log_3 v \\ &= \frac{\ln v}{\ln 3}\end{aligned}$$

Segue-se disto que

$$\frac{du}{dx} = 1$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

$$\frac{dg}{dv} = \frac{1}{\ln 3}\frac{1}{v}$$

*E, usando a **regra da cadeia** na forma de Leibnitz, tem-se que*

$$\begin{aligned}g'(x) &= \frac{dg}{dx} \\ &= \frac{dg}{dv}\frac{dv}{du}\frac{du}{dx} \\ &= \frac{1}{\ln 3}\frac{1}{v}\frac{1}{2\sqrt{u}}1 \\ &= \frac{1}{2\ln 3\sqrt{x+1}\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{1}{2(\ln 3)(x+1)}\end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Do enunciado do problema tem-se que o gráfico da função*

$$f(x) = ax^2 + bx$$

passa pelo ponto $(1, 5)$ *e sua tangente neste ponto possui coeficiente angular* $m = 8$*, ou seja*

$$\begin{cases} f(1) = 5 \\ f'(1) = 8 \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ 2a + b = 8 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontra-se

$$a = 3$$

$$b = 2$$

■