Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Prof$^{\text{o}}$. Edson

1$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito Prova Final **2018**
Data: Terça-feira, 02 de Outubro de 2018 **Turma 1X**

Exercício 1

a). *Observe que*

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\cos x}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{-\operatorname{sen}x}{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}\textit{\textbf{(L'Hôpital)}}$$

$$=-\infty$$

Visto que

$$x\to\frac{\pi}{2}^+\Rightarrow x>\frac{\pi}{2}\Rightarrow x-\frac{\pi}{2}>0$$

e

$$-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=-1<0$$

□

b). *Considere*

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{2x-4}+\frac{1}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{1+2}{2(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{3}{2(x-2)}$$

$$=\nexists$$

Uma vez que

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{3}{2(x-2)}=+\infty$$

e

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{3}{2(x-2)}=-\infty$$

■

Exercício 2 *Sabendo-se que*

$$F(x)=f(g(x))$$

segue-se da ***regra da cadeia*** *que*

$$F'(x)=f'(g(x))g'(x)$$

Como

$$f'(x)=\frac{x}{x^2+1}$$

e

$$g(x)=\sqrt{3x-1}$$

Tem-se que

$$f'(g(x))=\frac{g(x)}{(g(x))^2+1}$$

$$=\frac{\sqrt{3x-1}}{3x-1+1}$$

$$=\frac{\sqrt{3x-1}}{3x}$$

e

$$g'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$$

Portanto

$$F'(x)=\frac{\sqrt{3x-1}}{3x}\frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$$

$$=\frac{1}{2x}$$

■

Exercício 3 *Sabe-se que a partícula move-se sobre a curva $xy=8$. Assim, temos que as coordenadas x e y desta partícula mudam com o tempo. Assim, derivando implicitamente, teremos*

$$\frac{d}{dt}(xy)=\frac{d}{dt}(8)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{dx}{dt}y+x\frac{dy}{dt}=0$$

Também é informado no problema que a coordenada y da partícula está decrescendo a uma taxa de $3\,cm/s$ quando atinge o ponto $(4,2)$, ou seja

$$\frac{dy}{dt}=-3\,cm/s$$

Com isto segue-se que, neste instante teremos

$$\frac{dx}{dt}2+4(-3)=0\Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dt}=6\,cm/s$$

■

Exercício 4 *Seja $P=(a,b)$ um ponto qualquer sobre o gráfico de $y=x^2+1$, ou seja*

$$b=a^2+1$$

A distância entre o ponto P e o ponto $(3,1)$ é dada por

$$\mathbf{d}=\sqrt{(a-3)^2+(b-1)^2}$$

$$=\sqrt{(a-3)^2+a^4}$$

$$=\sqrt{a^4+a^2-6a+9}$$

Considere a função

$$\mathbf{g}(a)=a^4+a^2-6a+9$$

e observe que, minimizando a função $\mathbf{g}$, estamos também minimizando a função $\mathbf{d}$. Para isto, perceba que

$$\mathbf{g}'(a)=4a^3+2a-6$$

e nossos candidatos a extremos são obtidos como solução da seguinte equação

$$\mathbf{g}'(a)=0\Rightarrow$$

$$4a^3+2a-6=0\Rightarrow$$

$$2a^3+a-3=0$$

Donde segue-se que $a=1$ é a única raíz real e, portanto nosso único candidato. Para confirmarmos que de fato trata-se de um ponto de mínimo para a função $\mathbf{g}$, observe que

$$\mathbf{g}''(a)=6a^2+1>0,\forall a\in\mathbb{R}$$

Com isto,temos que $b=2$ e o ponto procurado é $(1,2)$. ■

Exercício 5 *Observe que a reta em questão possui coeficiente angular*

$$m_2=-\frac{1}{2}$$

Logo, a reta que estamos procurando possui coeficiente angular m_1, sendo

$$m_1\cdot m_2=-1$$

ou seja,

$$m_1=2$$

Considere (a,b) sendo o ponto sobre a curva $y^3=2x^2$, tal que

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}=m_1=2 \tag{1}$$

usando derivação implícita sobre a equação da curva dada, teremos

$$3y^2\frac{dy}{dx}=4x$$

donde segue-se que

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}=\frac{4a}{3b^2}$$

Como o ponto (a,b) está sobre a curva, segue-se que

$$b^3=2a^2\Leftrightarrow b=\sqrt[3]{2a^2}$$

Assim, temos

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}=\frac{4a}{3\sqrt[3]{4a^4}}$$

Voltando à equação (1) teremos

$$\frac{4a}{3\sqrt[3]{4a^4}}=2\Leftrightarrow$$

$$4a=6\sqrt[3]{4a^4}\Leftrightarrow$$

$$2a=3\sqrt[3]{4a^4}\Leftrightarrow$$

$$8a^3=27\cdot 4a^4\Leftrightarrow$$

$$a=\frac{2}{27}$$

e, em conseqüência disto,

$$b=\frac{2}{9}$$

Ou seja, o ponto procurado é

$$(a,b)=\left(\frac{2}{27},\frac{2}{9}\right)$$

■