Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Prof$^{\text{o}}$. Edson

1$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito 3ª Prova **2018**
Data: Terça-feira, 2 de Outubro **Turma 1X**

Exercício 1

a). *Observe que o numerador e denominador da função dentro do limite se aproximam de zero quando $x \to 0$. Assim, usando a **regra de L'Hospital**, tem-se*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{e^x + \operatorname{sen} x} = 1$$

$\square$

b). *Observe que*

$$\lim_{x\to +\infty} x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

*e o numerador e denominador desta função dentro do limite tendem a zero quando $x \to +\infty$. Portanto, usando a **regra de L'Hospital**, tem-se*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to +\infty} x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) &= \lim_{x\to +\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\left(-\frac{\pi}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to +\infty} -\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\left(-\frac{\pi}{x^2}\right)x^2 \\
&= \lim_{x\to +\infty} \pi\cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \\
&= \pi
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Exercício 2

Observe que

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 6x^5 - 8x^3 \\
&= 2x^3\left(3x^2 - 4\right) \\
f''(x) &= 30x^4 - 24x^2 \\
&= 6x^2\left(5x^2 - 4\right)
\end{aligned}$$

Os candidatos a extremos de f são soluções da equação

$$\begin{aligned}
f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \\
2x^3\left(3x^2 - 4\right) = 0 &\Leftrightarrow \\
x = 0 \, ou \, x &= \pm\sqrt{\frac{4}{3}}
\end{aligned}$$

Para classificar os candidatos encontrados, é necessário analisar o sinal de f'' em cada um deles, ou seja

$$\begin{aligned}
f''(0) &= 0 \\
f''\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) &= 6\frac{4}{3}\left(5\frac{4}{3} - 4\right) \\
&= \frac{64}{3} > 0 \\
f''\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right) &= 6\frac{4}{3}\left(5\frac{4}{3} - 4\right) \\
&= \frac{64}{3} > 0
\end{aligned}$$

*Segue-se disto que $x = 0$ é um **ponto de inflexão**, e $x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$ são ambos **pontos de mínimos globais**.* $\blacksquare$

Exercício 3

A circunferência de centro em $(2,0)$ e raio 2 possui equação dada por

$$(x-2)^2 + y^2 = 4$$

Considerando y como variável dependente de x e derivando a equação anterior em relação a x, tem-se

$$\begin{aligned}
2(x-2) + 2y\frac{dy}{dx} = 0 &\Leftrightarrow \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{2-x}{y}
\end{aligned}$$

Sobre a circunferência os pontos de abcissa $x = 1$ possuem ordenadas obtidas da equação

$$(1-2)^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{3}$$

Assim, nestes pontos os coeficientes angulares das suas respectivas tangentes são

$$m_1 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1,y=\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$m_2 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1,y=-\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Logo as retas normais à circunferência nos pontos $(1, \sqrt{3})$ *e* $(1, -\sqrt{3})$ *possuem, respectivamente, os seguintes coeficientes angulares*

$$m_{1\perp} = \frac{-1}{m_1} = -\sqrt{3}$$

$$m_{2\perp} = \frac{-1}{m2} = \sqrt{3}$$

e suas equação são

$$y - \sqrt{3} = -\sqrt{3}(x-1)$$

e

$$y + \sqrt{3} = \sqrt{3}(x-1)$$

■

Exercício 4 *De acordo com o enunciado do problema as variáveis* x *e* y *mudam com tempo. Além disso, é dado que*

$$y = 2x^2 + 3x - 1$$

Então, derivando em ambos os lados desta equação em relação o tempo, tem-se

$$\frac{dy}{dt} = (4x+3)\,\frac{dx}{dt}$$

Como

$$\frac{dx}{dt} = 6\,u/\min$$

quando o objeto está no ponto $(0, -1)$*, ou seja quando* $x = 0$ *e* $y = -1$*, segue-se*

$$\frac{dy}{dt} = (4 \cdot 0 + 3)\,6$$
$$= 18\,u/\min$$

■

Exercício 5 *Um ponto sobre a curva*

$$y = x^2 + x$$

possui coordenadas

$$(x, x^2 + x)$$

A distância deste ponto ao ponto $(7, 0)$ *é dada por*

$$\begin{aligned} f(x) = d^2 &= (x-7)^2 + (x^2+x)^2 \\ &= x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 14x + 49 \end{aligned}$$

Assim, tem-se

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 4x - 14$$

Os candidatos a extemos de f *são obtidos como solução da equação*

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$
$$4x^3 + 6x^2 + 4x - 14 = 0$$

Ou seja

$$x = 1$$

é o único candidato real. Observe que

$$f''(x) = 12x^2 + 12x + 4$$

e

$$f''(1) = 28 > 0$$

Ou seja, $x = 1$ *de fato é um* ***ponto de mínimo global*** *da função* f. ■