

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Prof. Edson

1º Semestre

Gabarito 2ª Prova
Data: Quarta-feira, 5 de Setembro

2018
Turma 1X

Exercício 1

a). Observe que

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^6 \left(9 - \frac{1}{x^5}\right)}}{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^3}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 \sqrt{9 - \frac{1}{x^5}}}{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^3}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9 - \frac{1}{x^5}}}{1 + \frac{1}{x^3}} \\ &= 3\end{aligned}$$

□

b). Observe que

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n+1+2}{2n+1}\right)^{n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{2n+1}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

Considere uma nova variável u tal que

$$\frac{1}{u} = \frac{2}{2n+1}$$

ou seja

$$u = \frac{2n+1}{2}$$

Disto segue-se que

$$n = u - \frac{1}{2}$$

e

$$n \rightarrow +\infty \Rightarrow u \rightarrow +\infty$$

Ou seja

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{2n+1}\right)^{n+1} \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{u - \frac{1}{2} + 1} \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{u + \frac{1}{2}} \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= e\end{aligned}$$

■

Exercício 2 Uma das maneiras de determinar a equação de uma reta é encontrar um ponto P por onde esta reta passa e seu coeficiente angular m . Por tratar-se de uma reta tangente ao gráfico de

$$y = \frac{2x+1}{3x-4}$$

no ponto de abscissa $x = -1$, segue-se que

$$P = (-1, y(-1))$$

e

$$m = y'(-1)$$

Onde

$$\begin{aligned}y(-1) &= \frac{2(-1)+1}{3(-1)-4} \\ &= \frac{1}{7}\end{aligned}$$

Para o cálculo de $y'(-1)$, é necessário inicialmente calcular $y'(x)$. Usando a regra do quociente, tem-se

$$\begin{aligned}y'(x) &= \frac{(2x+1)'(3x-4) - (2x+1)(3x-4)'}{(3x-4)^2} \\ &= \frac{2(3x-4) - (2x+1)3}{(3x-4)^2} \\ &= \frac{6x-8-6x-3}{(3x-4)^2} \\ &= \frac{-11}{(3x-4)^2}\end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} m &= y'(-1) \\ &= -\frac{11}{49} \end{aligned}$$

E a reta procurada possui equação dada por

$$\begin{aligned} y - \frac{1}{7} &= -\frac{11}{49}(x + 1) \Leftrightarrow \\ y &= \frac{1}{7} - \frac{11}{49}x - \frac{11}{49} \Leftrightarrow \\ y &= -\frac{11}{49}x - \frac{4}{49} \end{aligned}$$

ou, na forma geral

$$49y + 11x = -4$$

Exercício 3

- a). Usando as **regras do quociente e da cadeia**, tem-se que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3 \sec^2 x)'(x) - 3 \sec^2 x(x)'}{x^2} \\ &= \frac{6x \sec x \sec x \operatorname{tg} x - 3 \sec^2 x}{x^2} \\ &= \frac{3 \sec^2 x (2x \operatorname{tg} x - 1)}{x^2} \end{aligned}$$

□

- b). Usando a **regra da cadeia na forma de Leibnitz**, considere

$$u = \cos x$$

$$v = u^2$$

Assim,

$$f(x) = \ln v$$

e

$$\frac{du}{dx} = -\operatorname{sen} x$$

$$\frac{dv}{du} = 2u$$

$$\frac{df}{dv} = \frac{1}{v}$$

Além disto, tem-se que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{df}{dx} \\ &= \frac{df}{dv} \frac{dv}{du} \frac{du}{dx} \\ &= \frac{1}{v} 2u (-\operatorname{sen} x) \\ &= \frac{1}{u^2} 2u (-\operatorname{sen} x) \\ &= -2 \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \\ &= -2 \operatorname{tg} x \end{aligned}$$

■

Exercício 4 Sabendo que

$$F(x) = f(g(x))$$

Tem-se, pela regra da cadeia, que

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

Assim, segue-se que

$$\begin{aligned} F'(3) &= f'(g(3))g'(3) \\ &= f'(6) \cdot 4 \\ &= 7 \cdot 4 \\ &= 28 \end{aligned}$$

■

Exercício 5 Uma vez que a função f é dada por sentença, o cálculo de sua derivada deve ser feito em três partes:

1º Caso: Para $x < 0$ tem-se

$$f(x) = 1 - x$$

$$\Rightarrow$$

$$f'(x) = 1$$

2º Caso: Para $x > 0$ tem-se

$$f(x) = e^{-x}$$

$$\Rightarrow$$

$$f'(x) = -e^{-x}$$

3º Caso: Quando $x = 0$, tem-se

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 1}{h} \end{aligned}$$

Como f possui sentenças diferentes à direita e à esquerda do zero, é necessário o uso de limites laterais para este cálculo, ou seja

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - 1}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1 - h - 1}{h} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{-h} - 1}{h}$$

Considere

$$w = e^{-h} - 1$$

e observe que

$$\begin{aligned} w + 1 &= e^{-h} \Rightarrow \\ \ln(w + 1) &= -h \Rightarrow \\ h &= -\ln(w + 1) \end{aligned}$$

e

$$h \rightarrow 0^+ \Rightarrow w \rightarrow 0^-$$

Logo

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - 1}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{-h} - 1}{h} \\ &= \lim_{w \rightarrow 0^-} \frac{w}{-\ln(w + 1)} \\ &= \lim_{w \rightarrow 0^-} \frac{1}{-\frac{1}{w} \ln(w + 1)} \\ &= \lim_{w \rightarrow 0^-} \frac{1}{-\ln(1 + w)^{\frac{1}{w}}} \\ &= \frac{1}{-\ln e} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Portanto

$$f'(0) = -1$$

e

$$\begin{aligned} f'(x) &= \begin{cases} -1, & \text{se } x < 0 \\ -1, & \text{se } x = 0 \\ -e^{-x}, & \text{se } x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -1, & \text{se } x \leq 0 \\ -e^{-x}, & \text{se } x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

■