Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Prof$^{\mathbf{o}}$. Edson

1º Semestre

Gabarito 1ª Prova **2018**
Data: Sexta-feira, 10 de Agosto de 2018 **Turma 1X**

Exercício 1

a). *Inicialmente observe que*

$$x^2 + 4x + 3 = (x+3)(x+1)$$

Assim,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -3} \frac{3x+9}{x^2+4x+3} &= \lim_{x\to -3} \frac{3\,(x+3)}{(x+3)(x+1)} \\ &= \lim_{x\to -3} \frac{3}{x+1} \\ &= -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

□

b). *Observe que*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \frac{1+\cos x}{1+\cos x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2\,(1+\cos x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2\,(1+\cos x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \frac{1}{1+\cos x} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Inicialmente observe que*

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2}$$

Tome

$$u = \sqrt[3]{x}$$

e observe que

$$u^3 = x$$

$$x \to 1 \Rightarrow u \to 1$$

Portanto

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2} = \lim_{u\to 1} \frac{u^2 - 2u + 1}{(u^3-1)^2}$$

Por outro lado,

$$u^2 - 2u + 1 = (u-1)^2$$

e

$$u^3 - 1 = (u-1)\left(u^2+u+1\right)$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2} &= \lim_{u\to 1} \frac{u^2 - 2u + 1}{(u^3-1)^2} \\ &= \lim_{u\to 1} \frac{(u-1)^2}{(u-1)^2\,(u^2+u+1)^2} \\ &= \lim_{u\to 1} \frac{1}{(u^2+u+1)^2} \\ &= \frac{1}{9}\end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Observe que*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - x^2}{1-\sqrt{x}} &= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - x^2}{1-\sqrt{x}} \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \frac{\sqrt{x}+x^2}{\sqrt{x}+x^2} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{x - x^4}{1-x} \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+x^2} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{x\left(1-x^3\right)}{1-x} \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+x^2}\end{aligned}$$

Além disso,

$$1 - x^3 = (1-x)\left(x^2+x+1\right)$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - x^2}{1-\sqrt{x}} &= \lim_{x\to 1} \frac{x\,(1-x)\left(x^2+x+1\right)}{1-x} \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+x^2} \\ &= \lim_{x\to 1} x\left(x^2+x+1\right) \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+x^2} \\ &= 3\end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Inicialmente observe que*

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos(x+x)\\ &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\\ &= 1 - 2\operatorname{sen}^2 x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 2x &= \operatorname{sen}(x+x)\\ &= 2\operatorname{sen} x\,\cos x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos(2x+x)\\ &= \cos 2x\cos x - \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x\\ &= \left(1-2\operatorname{sen}^2 x\right)\cos x - (2\operatorname{sen} x\,\cos x)\operatorname{sen} x\\ &= \cos x - 4\operatorname{sen}^2 x\cos x\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\cos 2x - \cos 3x &= 1 - 2\operatorname{sen}^2 x - \cos x + 4\operatorname{sen}^2 x\cos x\\ &= 1 - \cos x - 2\operatorname{sen}^2 x\,(1 - 2\cos x)\end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{aligned}A &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x - \cos 3x}{x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x - 2\operatorname{sen}^2 x\,(1-2\cos x)}{x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x - 2\operatorname{sen}^2 x\,(1-2\cos x)}{x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x}{x^2} - 2(1-2\cos x)\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2\right]\\ &= \frac{1}{2}+2\\ &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

■

(Outro Modo:) *Observe que*

$$\begin{aligned}A &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x - \cos 3x}{x^2}\frac{\cos 2x + \cos 3x}{\cos 2x + \cos 3x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 2x - \cos^2 3x}{x^2(\cos 2x + \cos 3x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\operatorname{sen}^2 2x - \left(1-\operatorname{sen}^2 3x\right)}{x^2(\cos 2x + \cos 3x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}^2 2x + \operatorname{sen}^2 3x}{x^2(\cos 2x + \cos 3x)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A &= \lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}^2 2x + \operatorname{sen}^2 3x}{x^2}\frac{1}{\cos 2x + \cos 3x}\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{-\operatorname{sen}^2 2x}{x^2} + \frac{\operatorname{sen}^2 3x}{x^2}\right)\frac{1}{\cos 2x + \cos 3x}\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{-\operatorname{sen}^2 2x}{x^2}\frac{4}{4} + \frac{\operatorname{sen}^2 3x}{x^2}\frac{9}{9}\right)\frac{1}{\cos 2x + \cos 3x}\\ &= \lim_{x\to 0}\left(-4\frac{\operatorname{sen}^2 2x}{4x^2} + 9\frac{\operatorname{sen}^2 3x}{9x^2}\right)\frac{1}{\cos 2x + \cos 3x}\\ &= \lim_{x\to 0}\left[-4\left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}\right)^2 + 9\left(\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}\right)^2\right]\frac{1}{\cos 2x + \cos 3x}\\ &= (-4+9)\frac{1}{2}\\ &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Considere a função*

$$f(x) = \begin{cases}\dfrac{\operatorname{tg}(kx)}{x}, & se\ x<0\\ 3x+2k^2, & se\ x\geq 0\end{cases}$$

Para que f seja contínua em $x=0$, é necessário que

i). $f(0)$ exista. Observe no entanto, que

$$f(0) = 3\cdot 0 + 2k^2$$

Ou seja, se existir k, $f(0)$ também existe.

ii). $\lim_{x\to 0} f(x)$ exista. Observe que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^{+-}} f(x) &= \lim_{x\to 0^{+-}}\left(3x+2k^2\right)\\ &= 2k^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{tg}(kx)}{x}\\ &= \lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{\operatorname{sen} kx}{\cos kx}}{x}\\ &= \lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen} kx}{x\cos kx}\frac{k}{k},\ k\neq 0\\ &= \lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen} kx}{kx}\frac{k}{\cos kx}\\ &= k\end{aligned}$$

Assim, é necessário que

$$\lim_{x\to 3^{+-}} f(x) = \lim_{x\to -3^{-}} f(x) \Leftrightarrow$$

$$2k^2 = k \Leftrightarrow$$

$$(2k-1)\,k = 0 \Leftrightarrow$$

$$k = \frac{1}{2}$$

Portanto, é necessário que $k = \frac{1}{2}$ *para que este item necessário para a continuidade de* f *em* 0 *esteja satisfeito.*

iii). Por fim, é necessário que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

Dos itens (i), (ii), sabe-se que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2k^2 = \frac{1}{2}$$

e

$$f(0) = 2k^2 = \frac{1}{2}$$

Assim, tem-se o que desejava-se.

Diante da validade dos itens (i), (ii) e (iii) tem-se provada a continuidade da função f *em* $x = 0$ *para* $k = \dfrac{1}{2}$. ■.