

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Prof. Edson

2º Semestre

Gabarito Prova Final

Data: Quinta-feira, 19 de Abril de 2018

2017

Turma A1

Exercício 1

a). Observe que

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos x}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{-\operatorname{sen} x}{2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} \quad (L'Hôpital)$$

$$= -\infty$$

Visto que

$$x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+ \Rightarrow x > \frac{\pi}{2} \Rightarrow x - \frac{\pi}{2} > 0$$

e

$$-\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = -1 < 0$$

□

b). Considere

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{2x-4} + \frac{1}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1+2}{2(x-2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{2(x-2)}$$

$$= \nexists$$

Uma vez que

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{2(x-2)} = +\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{2(x-2)} = -\infty$$

■

Exercício 2 A circunferência de raio 2 e centro em (2,0) possui equação dada por

$$(x-2)^2 + y^2 = 4$$

Derivando esta equação implicitamente, em relação a x, obtem-se

$$2(x-2) + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x+2}{y}$$

Em $x = 1$, tem-se o coeficiente angular da reta tangente à curva nos pontos de abscissa 1, ou seja

$$m_t = \frac{dy}{dx}(1)$$

$$= \frac{1}{y(1)}$$

Onde $y(1)$ pode ser encontrado substituindo $x = 1$ na equação da circunferência em questão:

$$(1-2)^2 + (y(1))^2 = 4 \Rightarrow$$

$$1 + (y(1))^2 = 4 \Rightarrow$$

$$y(1) = \pm\sqrt{3}$$

Logo,

$$y(1) = \sqrt{3} \Rightarrow m_t = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$y(1) = -\sqrt{3} \Rightarrow m_t = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

E o coeficiente das retas normais que deseja-se encontrar, serão portanto

$$m_n = -\sqrt{3}$$

ou

$$m_n = \sqrt{3}$$

E as equações procuradas são

$$y - \sqrt{3} = -\sqrt{3}(x-1) \Leftrightarrow y = \sqrt{3}(-x+2)$$

e

$$y + \sqrt{3} = \sqrt{3}(x-1) \Leftrightarrow y = \sqrt{3}(\sqrt{3}x-2)$$

■

Exercício 3 Sendo

$$f(x) = 2xe^{-3x}$$

Segue-se que

$$f'(x) = 2e^{-3x} - 6xe^{-3x}$$

$$= e^{-3x}(2-6x)$$

e

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= -3e^{-3x}(2 - 6x) + e^{-3x}(-6) \\
 &= e^{-3x}(-6 + 18x - 6) \\
 &= e^{-3x}(18x - 12) \\
 &= 6e^{-3x}(3x - 2)
 \end{aligned}$$

Como $6e^{-3x} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, segue-se que

$$\begin{aligned}
 f''(x) &> 0 \text{ quando } 3x - 2 > 0 \\
 f''(x) &< 0 \text{ quando } 3x - 2 < 0
 \end{aligned}$$

Ou seja, f possui concavidade para cima quando $x > \frac{2}{3}$ e concavidade para baixo quando $x < \frac{2}{3}$, sendo $x = \frac{2}{3}$ o único ponto de inflexão desta função. ■

Exercício 4 Sabendo que o objeto move-se sobre a parábola de equação

$$y = 2x^2 + 3x - 1$$

Segue-se que

$$\frac{dy}{dt} = (4x + 3) \frac{dx}{dt}$$

Logo, como $\frac{dx}{dt} = 6$ uni/min, e deseja-se saber a taxa de variação de y em relação ao tempo no ponto $(0, -1)$, ou seja, quando $x = 0$, tem-se que

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dt} &= (4 \cdot 0 + 3) \cdot 6 \\
 &= 18 \text{ uni/min}
 \end{aligned}$$

■

Exercício 5 Considere $(x, 0)$ sendo as coordenadas do vértice inferior direito do retângulo (sobre o eixo x). Por simetria segue-se que o outro vértice inferior possui coordenadas $(-x, 0)$ e disto segue-se que o retângulo construído dessa forma possui base de comprimento $b = 2x$. O vértice superior direito, por estar sobre a parábola $y = 16 - x^2$ e acima do vértice $(x, 0)$, terá coordenadas $(x, 16 - x^2)$, de modo que a altura do retângulo é $h = 16 - x^2$. Assim, a área do retângulo é

$$\begin{aligned}
 A(x) &= b \cdot h \\
 &= 2x(16 - x^2) \\
 &= -2x^3 + 32x
 \end{aligned}$$

Para encontrar-se os pontos candidatos a extremos de A é necessário resolver a seguinte equação

$$\begin{aligned}
 A'(x) &= 0 \Leftrightarrow \\
 -6x^2 + 32 &= 0 \Leftrightarrow \\
 x &= \pm \sqrt{\frac{16}{3}}
 \end{aligned}$$

Como x deve ser um valor positivo, uma vez que $2x = b$ é um dos lados do retângulo, segue-se que o único candidato possível é

$$x = \sqrt{\frac{16}{3}}$$

Para classificar este candidato, observe que

$$\begin{aligned}
 A''(x) &= -12x \Rightarrow \\
 A''\left(\sqrt{\frac{16}{3}}\right) &= -12\sqrt{\frac{16}{3}} < 0
 \end{aligned}$$

Sendo possível, portanto, afirmar que $x = \sqrt{\frac{16}{3}}$ é um ponto de máximo para a função $A(x)$. Logo o retângulo procurado possui vértices $\left(\sqrt{\frac{16}{3}}, 0\right)$, $\left(\sqrt{\frac{16}{3}}, \frac{32}{3}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{16}{3}}, \frac{32}{3}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{16}{3}}, 0\right)$. ■

Exercício 6 Inicialmente observe que

$$\begin{aligned}
 f(x) &= |x - 2| \\
 &= \begin{cases} x - 2, & \text{se } x - 2 \geq 0 \\ -(x - 2), & \text{se } x - 2 < 0 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} x - 2, & x \geq 2 \\ -(x - 2), & x < 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
 \int_1^4 |x - 2| dx &= \int_1^2 |x - 2| dx + \int_2^4 |x - 2| dx \\
 &= -\int_1^2 (x - 2) dx + \int_2^4 (x - 2) dx \\
 &= -\left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) \Big|_1^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) \Big|_2^4 \\
 &= \frac{5}{2}
 \end{aligned}$$

■