**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Prof°. Edson**

**2° Semestre**

**Gabarito 3ª Prova** **2017**
**Data: Sexta-feira, 13 de Abril de 2018** **Turma A1**

---

**Exercício 1**

**a).** *Observe que*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\sec^2 x}\,\textit{(\textbf{L'Hôpital})}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\cos^3 x$$

$$= 1$$

□

**b).** *Considere*

$$\lim_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln\left[(e^x+x)^{\frac{1}{x}}\right]}$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(e^x+x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\dfrac{\ln(e^x+x)}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\dfrac{e^x+1}{e^x+x}}\,\textit{(\textbf{L'Hôpital})}$$

$$= e^2$$

■

**Exercício 2** *Derivando-se implicitamente a equação da curva sobre a qual a partícula move-se, em relação ao tempo, obtem-se*

$$\frac{d}{dt}\left(16x^2+9y^2\right) = \frac{d}{dt}(144) \quad \Rightarrow$$

$$32x\frac{dx}{dt} + 18y\frac{dy}{dt} = 0$$

*Como deseja-se encontrar os pontos $(x, y)$ para os quais*

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$$

*A equação anterior, ao substituir esta condição, torna-se*

$$32x\frac{dx}{dt} + 18y\frac{dx}{dt} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(32x+18y)\frac{dx}{dt} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$32x + 18y = 0,$$

*visto que $\frac{dx}{dt} \neq 0$ nos pontos procurados. Assim, segue-se que*

$$32x + 18y = 0 \quad \Rightarrow$$

$$y = -\tfrac{32}{18}x \quad \Rightarrow$$

$$y = -\tfrac{16}{9}x$$

*Retornando à equação da curva, tem-se*

$$16x^2 + 9y^2 = 144 \quad \Rightarrow$$

$$16x^2 + 9\left(-\tfrac{16}{9}x\right)^2 = 144 \quad \Rightarrow$$

$$16x^2 + \tfrac{9\cdot 16^2}{9\cdot 9}x^2 = 144 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{9\cdot 16x^2 + 16^2x^2}{9} = 144 \quad \Rightarrow$$

$$\tfrac{25\cdot 16}{9}x^2 = 144 \quad \Rightarrow$$

$$x = \pm\sqrt{\tfrac{144\cdot 9}{25\cdot 16}} \quad \Rightarrow$$

$$x = \pm\tfrac{12\cdot 3}{5\cdot 4} \quad \Rightarrow$$

$$x = \pm\tfrac{9}{5}$$

*Quando $x = -\frac{9}{5}$ tem-se $y = \frac{16}{5}$ e quando $x = \frac{9}{5}$ tem-se $y = -\frac{16}{5}$. Portanto $\left(-\frac{9}{5}, \frac{16}{5}\right)$ e $\left(\frac{9}{5}, -\frac{16}{5}\right)$ são os pontos procurados.* ■

**Exercício 3** *Sendo*

$$f(x) = \ln\sqrt{x^2+4}$$

**a).** *Segue-se que*

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\frac{1}{2\sqrt{x^2+4}}2x$$
$$= \frac{x}{x^2+4}$$

*e como* $x^2+4>0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ *segue-se que*

$$f'(x) > 0 \, quando \, x > 0$$
$$f'(x) < 0 \, quando \, x < 0$$

*Ou seja*

$$f \text{ é crescente para } x > 0$$
$$f \text{ é decrescente para } x < 0$$

□

**b).** *Derivando a expressão obtida para* $f'$ *tem-se*

$$f''(x) = \frac{-x^2+4}{(x^2+4)^2}$$

*e como* $(x^2+4)^2 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ *segue-se que*

$$f''(x) > 0 \, quando \, -x^2+4 > 0$$
$$f''(x) < 0 \, quando \, -x^2+4 < 0$$

*Ou seja*

$$f''(x) > 0 \, quando \, -2 < x < 2$$
$$f''(x) < 0 \, quando \, x < -2 \;\; ou \;\; x > 2$$

*Portanto,* $f$ *possui concavidade para cima quando* $-2 < x < 2$ *e concavidade para baixo quando* $x < -2$ *ou* $x > 2$. ■

**Exercício 4** *Considere* $(x, 0)$ *sendo as coordenadas do vértice inferior direito do retângulo (sobre o eixo x). Por simetria segue-se que o outro vértice inferior possui coordenadas* $(-x, 0)$ *e disto segue-se que o retângulo construido dessa forma possui base de comprimento* $b = 2x$. *O vértice superior direito, por estar sobre a parábola* $y = 16 - x^2$ *e acima do vértice* $(x, 0)$, *terá coordenadas* $(x, 16 - x^2)$, *de modo que a altura do retângulo é* $h = 16 - x^2$. *Assim, a área do retângulo é*

$$A(x) = b \cdot h$$
$$= 2x\left(16 - x^2\right)$$
$$= -2x^3 + 32x$$

*Para encontrar-se os pontos candidatos a estremos de A é necessário resolver a seguinte equação*

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow$$
$$-6x^2 + 32 = 0 \Leftrightarrow$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{16}{3}}$$

*Como x deve ser um valor positivo, uma vez que* $2x = b$ *é um dos lados do retângulo, segue-se que o único candidato possível é*

$$x = \sqrt{\frac{16}{3}}$$

*Para classificar este candidato, observe que*

$$A''(x) = -12x \Rightarrow$$
$$A''\left(\sqrt{\frac{16}{3}}\right) = -12\sqrt{\frac{16}{3}} < 0$$

*Sendo possível, portanto, afirmar que* $x = \sqrt{\frac{16}{3}}$ *é um ponto de máximo para a função* $A(x)$. *Logo o retângulo procurado possui vértices* $\left(\sqrt{\frac{16}{3}}, 0\right), \left(\sqrt{\frac{16}{3}}, \frac{32}{3}\right), \left(-\sqrt{\frac{16}{3}}, \frac{32}{3}\right), \left(-\sqrt{\frac{16}{3}}, 0\right)$. ■

**Exercício 5** *Inicialmente observe que*

$$f(x) = |\cos x|$$
$$= \begin{cases} \cos x, & se \ \cos x \geq 0 \\ -\cos x, & se \ \cos x < 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \cos x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ -\cos x, & \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

*Assim*

$$\int_0^{\frac{3\pi}{4}} |\cos x|\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x|\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} |\cos x|\, dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} -\cos x dx$$
$$= \operatorname{sen} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (-\operatorname{sen} x) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}$$
$$= \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} 0\right) + \left(-\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

■