Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Prof^{o}. Edson

2^{o} Semestre

Gabarito 2ª Prova **2017**
Data: Sexta-feira, 9 de Março **Turma A1**

Exercício 1

a). *Observe que*

$$\begin{aligned} f(x) &= 2^{\operatorname{sen}\pi x} \\ &= e^{\ln 2^{\operatorname{sen}\pi x}} \\ &= e^{\operatorname{sen}\pi x\ \ln 2} \end{aligned}$$

Considere

$$u(x) = \pi x$$
$$v(u) = \ln 2\, sen\, u$$
$$f(v) = e^{v}$$

Assim,

$$\frac{du}{dx} = \pi$$
$$\frac{dv}{du} = \ln 2\ \cos u$$
$$\frac{df}{dv} = e^{v}$$

e, usando a ***regra da cadeia****, tem-se que*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{df}{dx} \\ &= \frac{df}{dv}\frac{dv}{du}\frac{du}{dx} \\ &= e^{v}\ln 2\ \cos u\, \pi \\ &= \pi \ln 2 \cos(\pi x) e^{\ln 2 \operatorname{sen}\pi x} \\ &= \pi \ln 2 \cos(\pi x) 2^{\operatorname{sen}\pi x} \end{aligned}$$

□

b). *Considere*

$$u(t) = \frac{t}{4+t^2}$$

e observe que

$$y(u) = \sqrt{u}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{4+t^2-t\,(2t)}{\left(4+t^2\right)^2} \\ &= \frac{4-t^2}{\left(4+t^2\right)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

e, usando a ***regra da cadeia****, tem-se*

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{dy}{du}\frac{du}{dt} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{u}}\frac{4-t^2}{\left(4+t^2\right)^2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{t}{4+t^2}}}\frac{4-t^2}{\left(4+t^2\right)^2} \\ &= \frac{\left(4+t^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2t^{\frac{1}{2}}}\frac{4-t^2}{\left(4+t^2\right)^2} \\ &= \frac{4-t^2}{2t^{\frac{1}{2}}\left(4+t^2\right)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Inicialmente observe que*

$$\begin{aligned} f(x) &= |2x+4|+3 \\ &= \begin{cases} 2x+4+3, & se\, 2x+4 \geq 0 \\ -(2x+4)+3, & se\, 2x+4 < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2x+7, & se\, x \geq -2 \\ -2x-1, & se\, x < -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Assim,

- *para $x > -2$ tem-se $f(x) = 2x+7$. Portanto*

$$f'(x) = 2$$

- *para $x < -2$ tem-se $f(x) = -2x-1$ e disto segue-se que*

$$f'(x) = -2$$

- *para $x=-2$, tem-se*

$$f'(-2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$$

Perceba porém, que

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=2$$

e

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=-2$$

ou seja,

$$f'(-2)=\nexists$$

Tem-se por fim que

$$f'(x)=\begin{cases}2, \, se\, x>-2\\ -2, \, se\, x<-2\\ \nexists, \, se\, x=-2\end{cases}$$

■

Exercício 3 *Sendo*

$$f(x)=ax^2+bx$$

segue-se que

$$f'(x)=2ax+b$$

Como o gráfico da função f passa pelo ponto $(1,5)$, tem-se que

$$f(1)=5\Leftrightarrow a+b=5$$

Sabe-se também que o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1,5)$ é $m=8$, ou seja

$$f'(1)=m\Leftrightarrow 2a+b=8$$

Para descobri-se os valores de a e b é necessário portanto, resolver o seguinte sistema

$$\begin{cases}a+b=5\\ 2a+b=8\end{cases}$$

Donde segue-se que $a=3$ e $b=2$. ■

Exercício 4 *Derivando as funções dadas obtem-se*

$$f'(x)=2x+A$$
$$g'(x)=B$$

Substituindo no sistema dado tem-se

$$\begin{cases}f'(x)+g'(x)=1+2x\\ f(x)-g(x)=x^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}2x+A+B=1+2x\\ x^2+Ax-Bx=x^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(A+B)+2x=1+2x\\ (A-B)\,x+x^2=x^2\end{cases}$$

Ou seja

$$\begin{cases}A+B=1\\ A-B=0\end{cases}$$

donde segue-se que

$$A=\frac{1}{2}$$
$$B=\frac{1}{2}$$

■

Exercício 5 *Considerando y como função de x e* ***derivando implicitamente*** *a equação dada, tem-se*

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=\frac{d}{dx}(3)\Rightarrow$$
$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}=0\Rightarrow$$
$$\frac{dy}{dx}=-\sqrt{\frac{y}{x}}$$

Assim

$$\frac{dy}{dx}(4)=-\sqrt{\frac{y(4)}{4}}$$

Voltando à equação dada e substituindo $x=4$ tem-se

$$\sqrt{4}+\sqrt{y(4)}=3\Rightarrow y(4)=1$$

Portanto

$$\frac{dy}{dx}(4)=-\sqrt{\frac{1}{4}}=-\frac{1}{2}$$

Obs.: Foram consideradas apenas as raízes quadradas positivas de todos os radicais envolvidos no problema, uma vez que ambos representam a função raíz quadrada e por conta da definição de função segue-se o impedimento de duas imagens para um mesmo valor da abcissa. ■