Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Profº. Edson

2º Semestre

Gabarito 1ª Prova **2017**
Data: Domingo, 11 de Fevereiro de 2018 **Turma A1**

Exercício 1

a). *Inicialmente observe que*

$$x \to -1 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 \to 6$$

e

$$x \to -1^+ \Rightarrow x^2 + 4x + 3 \to 0^+$$
$$x \to -1^- \Rightarrow x^2 + 4x + 3 \to 0^-$$

Assim,

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 4x + 3} = +\infty$$

e

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 4x + 3} = -\infty$$

Ou seja,

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 4x + 3} = \nexists$$

□

b). *Considere*

$$A = \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 3} - 2}$$

e observe que

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 3} - 2} \frac{\sqrt{x^2 + 3} + 2}{\sqrt{x^2 + 3} + 2} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)\left(\sqrt{x^2 + 3} + 2\right)}{x^2 + 3 - 4} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)\left(\sqrt{x^2 + 3} + 2\right)}{x^2 - 1} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)\left(\sqrt{x^2 + 3} + 2\right)}{(x - 1)(x + 1)} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} + 2}{x + 1} \\
&= \frac{4}{2} \\
&= 2
\end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Deseja-se resolver o limite*

$$\lim_{x \to 0} \frac{6^x - 2^x}{x}$$

Para isto, observe inicialmente que

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{6^x - 2^x}{x} &= \lim_{x \to 0} 2^x \frac{\frac{6^x}{2^x} - 1}{x} \\
&= \lim_{x \to 0} 2^x \frac{\left(\frac{6}{2}\right)^x - 1}{x} \\
&= \lim_{x \to 0} 2^x \frac{3^x - 1}{x} \\
&= A \cdot B
\end{aligned}$$

Sendo

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{x \to 0} 2^x \\
&= 1
\end{aligned}$$

e

$$B = \lim_{x \to 0} \frac{3^x - 1}{x}$$

Para a resolução de B, considere

$$u = 3^x - 1$$

e observe que

$$x = \log_3(u + 1)$$

$$x \to 0 \Rightarrow u \to 0$$

Ou seja

$$\begin{aligned}
B &= \lim_{u \to 0} \frac{u}{\log_3(u + 1)} \\
&= \lim_{u \to 0} \frac{1}{\frac{1}{u} \log_3(u + 1)} \\
&= \lim_{u \to 0} \frac{1}{\log_3(u + 1)^{\frac{1}{u}}}
\end{aligned}$$

Como

$$\lim_{u\to 0}(u+1)^{\frac{1}{u}} = e,$$

segue-se que

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{\log_3 e} \\ &= \frac{1}{\frac{\ln e}{\ln 3}} \\ &= 1\cdot\frac{\ln 3}{\ln e} \\ &= \ln 3 \end{aligned}$$

e

$$\lim_{x\to 0}\frac{6^x - 2^x}{x} = A\cdot B = \ln 3$$

■

Exercício 3 *Considere*

$$C = \lim_{x\to -\infty}\frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$$

e observe que

$$\begin{aligned} C &= \lim_{x\to -\infty}\frac{3^{-x}\left(3^{2x}-1\right)}{3^{-x}\left(3^{2x}+1\right)} \\ &= \lim_{x\to -\infty}\frac{3^{2x}-1}{3^{2x}+1} \end{aligned}$$

Sabendo que

$$x\to -\infty \Rightarrow 3^{2x}\to 0$$

tem-se que

$$\begin{aligned} C &= \lim_{x\to -\infty}\frac{3^{2x}-1}{3^{2x}+1} \\ &= \frac{-1}{1} \\ &= -1 \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Deseja-se calcular o seguinte limite*

$$D = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\operatorname{sen} x}{2x-\pi}$$

Considere a seguinte mudança de variável

$$u = x - \frac{\pi}{2}$$

donde segue-se que

$$x = u + \frac{\pi}{2}$$

e

$$x\to\frac{\pi}{2}\Rightarrow u\to 0$$

Retornando ao limite tem-se

$$\begin{aligned} D &= \lim_{u\to 0}\frac{1-\operatorname{sen}\left(u+\frac{\pi}{2}\right)}{2\left(u+\frac{\pi}{2}\right)-\pi} \\ &= \lim_{u\to 0}\frac{1-\operatorname{sen} u\cos\frac{\pi}{2}-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos u}{2u} \\ &= \lim_{u\to 0}\frac{1-\cos u}{2u} \\ &= \lim_{u\to 0}\frac{1-\cos u}{2u}\frac{1+\cos u}{1+\cos u} \\ &= \lim_{u\to 0}\frac{1-\cos^2 u}{2u\left(1+\cos u\right)} \\ &= \lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 u}{2u\left(1+\cos u\right)} \\ &= \lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen} u}{u}\frac{\operatorname{sen} u}{2\left(1+\cos u\right)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Considere a função*

$$f(x) = \begin{cases} cx+1, & se\, x\le 3 \\ cx^2-1, & se\, x>3 \end{cases}$$

Para que f seja contínua em $x=3$, é necessário que

i). $f(3)$ exista. Observe no entanto, que $f(3) = c\cdot 3+1 = 3c+1$. Ou seja, se existir c, $f(3)$ existe também.

ii). $\lim_{x\to 3} f(x)$ exista. Observe que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 3^{+-}} f(x) &= \lim_{x\to 3^{+-}} cx^2-1 \\ &= 9c-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -3^{-}} f(x) &= \lim_{x\to 3^{-}} cx+1 \\ &= 3c+1 \end{aligned}$$

Assim, é necessário que

$$\lim_{x\to 3^{+-}} f(x) = \lim_{x\to -3^{-}} f(x) \Leftrightarrow$$
$$9c - 1 = 3c + 1 \Leftrightarrow$$
$$c = \frac{1}{3}$$

Portanto, existe c tal que o limite existe, o que torna este item verdadeiro além do anterior.

iii). Por fim, é necessário que

$$\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$$

Dos itens (i), (ii), sabe-se que

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 3c + 1 = 9c - 1 = 2$$

e

$$f(3) = 3c + 1 = 2$$

Assim, tem-se o que desejava-se.

Diante da validade dos itens (i), (ii) e (iii) tem-se provada a continuidade da função f *em* $x = 3$ *para* $c = \frac{1}{3}$. $\blacksquare$.