Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Prof$^{\text{o}}$. Edson

1º Semestre

Gabarito Prova Final **2017**
Data: Terça-feira, 24 de Outubro **Turma 1X**

Exercício 1

a). *Observe que, para este limite, tem-se uma indeterminação do tipo "$\frac{0}{0}$". Assim, aplicando a* ***regra de L'Hospital****, tem-se*

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\cos 2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-2\operatorname{sen} 2x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\operatorname{sen} x}{4\cos 2x}$$

$$= \frac{1}{4}$$

□

b). *Observe que*

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln x) = \lim_{x\to+\infty}(x-\ln x)\frac{x+\ln x}{x+\ln x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-(\ln x)^2}{x+\ln x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x+\ln x} - \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x+\ln x}$$

Usando a ***regra de L'Hospital****, tem-se que*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x+\ln x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{1+\frac{1}{x}}$$

$$= +\infty$$

e

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x+\ln x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}\,\frac{x}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}}{1}$$

$$= 0$$

Assim,

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x+\ln x} - \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x+\ln x}$$

$$= +\infty - 0$$

$$= +\infty$$

(De outro modo)

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln x) = \lim_{x\to+\infty}(\ln e^x - \ln x)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^x}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^x}{1}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\ln e^x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x$$

$$= +\infty$$

■

Exercício 2

Inicialmente perceba que a função

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi x}{4}\right), & se\ |x|<1 \\ x, & se\ |x|\geq 1 \end{cases}$$

pode ser reescrita como

$$f(x) = \begin{cases} x, & se\, x\leq -1 \\ \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi x}{4}\right), & se\ -1<x<1 \\ x, & se\, x\geq 1 \end{cases}$$

A continuidade de f deve ser analisada em cada um dos intervalos em que suas sentenças estão definidas, além dos encontros destes.

- *Para $x\leq -1$, $f(x)=x$, ou seja f é polinomial e portanto contínua neste intervalo;*

- *Para* $-1 < x < 1$,

$$f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{4}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}$$

Como as funções $\operatorname{sen} x$ *e* $\cos x$ *são contínuas para todo* $x \in \mathbb{R}$ *e* $\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) \neq 0$ *quando* $-1 < x < 1$, *segue-se que* f *é também contínua neste intervalo;*

- *Para* $x \geq 1$, $f(x) = x$, *ou seja* f *é novamente polinomila e portanto contínua neste intervalo.*

- *Para* $x = -1$, *tem-se que*

i). $f(-1) = -1$, *ou seja* $f(-1)$ *existe;*

ii).

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} x = -1$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

Ou seja

$$\lim_{x\to -1} f(x) = -1$$

iii). Por fim, dos itens (i) e (ii) tem-se que

$$\lim_{x\to -1} f(x) = f(-1)$$

Diante da validade dos itens (i), (ii) e (iii) tem-se provada a continuidade da função f *em* $x = -1$.

- *Para* $x = 1$, *tem-se que*

i). $f(1) = 1$, *ou seja* $f(1)$ *existe;*

ii).

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x = 1$$

Ou seja

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1$$

iii). Por fim, dos itens (i) e (ii) tem-se que

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

Diante da validade dos itens (i), (ii) e (iii) tem-se provada a continuidade da função f *em* $x = 1$.

Segue-se portanto, que f *contínua em* $\mathbb{R}$. $\blacksquare$.

Exercício 3 *Sabendo-se que*

$$F(x) = f(g(x))$$

segue-se da ***regra da cadeia*** *que*

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

Como

$$f'(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

e

$$g(x) = \sqrt{3x-1}$$

Tem-se que

$$f'(g(x)) = \frac{g(x)}{(g(x))^2+1} = \frac{\sqrt{3x-1}}{3x-1+1} = \frac{\sqrt{3x-1}}{3x}$$

e

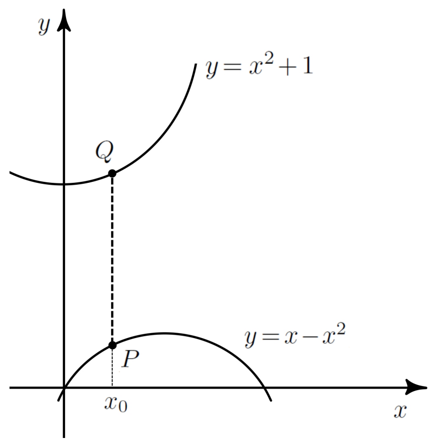
$$g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$$

Portanto

$$F'(x) = \frac{\sqrt{3x-1}}{3x}\frac{3}{2\sqrt{3x-1}} = \frac{1}{2x}$$

$\blacksquare$

Exercício 4 *Seja x_0 a abcissa do ponto sobre a parábola $y = x - x^2$, ou seja $P = (x_0, x_0 - x_0^2)$. Como trata-se de uma distância vertical, o ponto correspondente sobre a parábola $y = x^2 + 1$ será $Q = (x_0, x_0^2 + 1)$.*



Calculando a distância entre P e Q obtêm-se

$$\begin{aligned} f(x_0) &= dPQ \\ &= \sqrt{(x_0^2 + 1 - x_0 + x_0^2)^2} \\ &= 2x_0^2 - x_0 + 1 \end{aligned}$$

Para encontrar um extremo desta função é necessário resolver a seguinte equação

$$f'(x_0) = 0$$

Ou seja,

$$4x_0 - 1 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{4}$$

Observe que

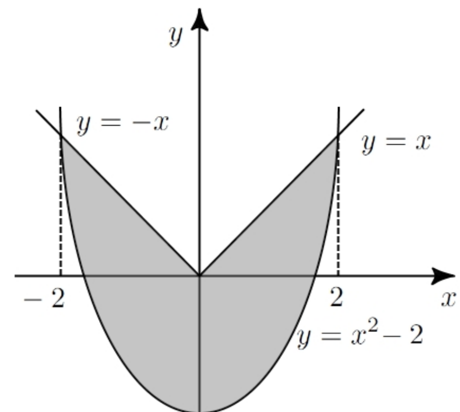
$$f''(x_0) = 4 > 0$$

O que permite afirmar que $x_0 = \dfrac{1}{4}$ é um ponto de mínimo e a distância procurada é, portanto

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{7}{8}$$

■

Exercício 5 *Realizando um esboço da região em questão, obtem-se o seguinte esboço*



Assim, a área desta região é dada por

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{0} \left[-x - (x^2 - 2)\right] dx + \int_{0}^{2} \left[x - (x^2 - 2)\right] dx \\ &= \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x\right)\Bigg|_{-2}^{0} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x\right)\Bigg|_{0}^{2} \\ &= 0 - \left(-\frac{4}{2} + \frac{8}{3} - 4\right) + \left(\frac{4}{2} - \frac{8}{3} + 4\right) - 0 \\ &= \frac{20}{3} \end{aligned}$$

■