Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Profº. Edson

1º Semestre

Gabarito 3ª Prova **2017**
Data: Sexta-feira, 20 de Outubro **Turma 1X**

Exercício 1

a). *Observe que, para este limite, tem-se uma indeterminação do tipo "$\frac{0}{0}$". Assim, aplicando a* ***regra de L'Hospital****, tem-se*

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\cos 2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-2\operatorname{sen} 2x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\operatorname{sen} x}{4\cos 2x}$$

$$= \frac{1}{4}$$

$\square$

b). *Observe que*

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln x) = \lim_{x\to+\infty}(x-\ln x)\frac{x+\ln x}{x+\ln x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-(\ln x)^2}{x+\ln x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x+\ln x} - \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x+\ln x}$$

Usando a ***regra de L'Hospital****, tem-se que*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x+\ln x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{1+\frac{1}{x}}$$

$$= +\infty$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x+\ln x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}\frac{x}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}}{1}$$

$$= 0$$

Assim,

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x+\ln x} - \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x+\ln x}$$

$$= +\infty - 0$$

$$= +\infty$$

(De outro modo)

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln x) = \lim_{x\to+\infty}(\ln e^x - \ln x)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{e^x}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{e^x}{1}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln e^x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x$$

$$= +\infty$$

$\blacksquare$

Exercício 2 *Sabendo-se que*

$$y = \sqrt{x^3+17}$$

tem-se, derivando implicitamente em relação a t em ambos os lados, que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{x^3+17}}3x^2\frac{dx}{dt}$$

Então, para $x=2$, $y=5$ e $\frac{dy}{dt}=2$, conclui-se que

$$2 = \frac{1}{2\sqrt{8+17}}12\frac{dx}{dt}$$

Ou seja,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{5}{3}$$

$\blacksquare$

Exercício 3 *Sendo*

$$f(x) = \ln\sqrt{x^2+4}$$

segue-se que

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\frac{1}{2\sqrt{x^2+4}}2x$$
$$= \frac{x}{x^2+4}$$

$$f''(x) = \frac{x^2+4-2x^2}{(x^2+4)^2}$$
$$= \frac{-x^2+4}{(x^2+4)^2}$$

a). *Para realizar o estudo de crescimento de f, deve-se realizar o estudo de sinal da fução f'. Para isto, observe que $x^2+4>0$, $\forall x \in R$. Assim,*

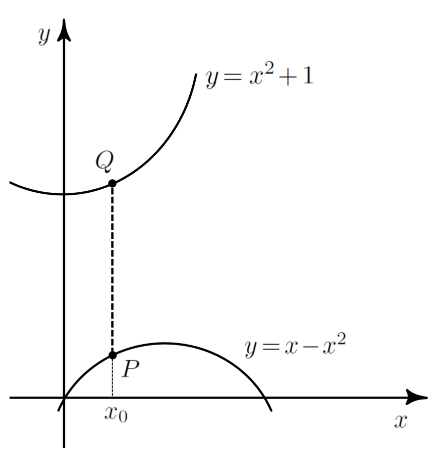
$f(x)$ é crescente para $x \in (0,+\infty)$
$f(x)$ é decrescente para $x \in (-\infty,0)$

b). *Para o estudo de concavidade de f é necessário realizar o estudo de sinal da função f''. Observando que $\left(x^2+4\right)^2 > 0$ e realizando o estudo de sinal do polinômio $-x^2+4$, tem-se que*

$f(x)$ é côncava para cima em $(-2,2)$
$f(x)$ é côncava para baixo em $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

■

Exercício 4 *Seja x_0 a abcissa do ponto sobre a parábola $y = x - x^2$, ou seja $P = (x_0, x_0 - x_0^2)$. Como trata-se de uma distância vertical, o ponto correspondente sobre a parábola $y = x^2+1$ será $Q = (x_0, x_0^2+1)$.*



Calculando a distância entre P e Q obtêm-se

$$f(x_0) = dPQ$$
$$= \sqrt{(x_0^2+1-x_0+x_0^2)^2}$$
$$= 2x_0^2 - x_0 + 1$$

Para encontrar um extremo desta função é necessário resolver a seguinte equação

$$f'(x_0) = 0$$

Ou seja,

$$4x_0 - 1 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{4}$$

Observe que

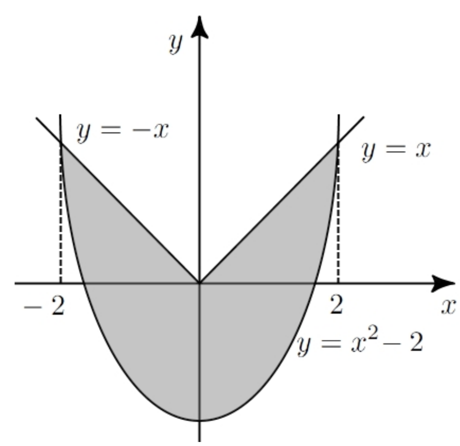
$$f''(x_0) = 4 > 0$$

O que permite afirmar que $x_0 = \dfrac{1}{4}$ é um ponto de mínimo e a distância procurada é, portanto

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{7}{8}$$

■

Exercício 5 *Realizando um esboço da região em questão, obtem-se o seguinte esboço*



Assim, a área desta região é dada por

$$A = \int_{-2}^{0}\left[-x-(x^2-2)\right]dx + \int_{0}^{2}\left[x-(x^2-2)\right]dx$$
$$= \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x\right)\Big|_{-2}^{0} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x\right)\Big|_{0}^{2}$$
$$= 0 - \left(-\frac{4}{2} + \frac{8}{3} - 4\right) + \left(\frac{4}{2} - \frac{8}{3} + 4\right) - 0$$
$$= \frac{20}{3}$$

■