Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Profº. Edson

1º Semestre

Gabarito 2ª Prova **2017**
Data: Sexta-feira, 9 de Março **Turma 1X**

Exercício 1

a). *Sendo*

$$f(x) = \sqrt{x}\,\mathrm{tg}^3\left(\sqrt{x}\right)$$

Segue-se, da ***regra do produto****, que*

$$f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)'\mathrm{tg}^3\left(\sqrt{x}\right) + \sqrt{x}\left[\mathrm{tg}^3\left(\sqrt{x}\right)\right]'$$

Observe que

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{x}\right)' &= \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' \\ &= \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} \\ &= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

e

$$\mathrm{tg}^3\left(\sqrt{x}\right) = p(q(x))$$

onde

$$\begin{cases} p(x) = \mathrm{tg}^3 x \\ q(x) = \sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p'(x) = 3\mathrm{tg}^2 x\,\sec^2 x \\ q'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$$

Assim, usando a ***regra da cadeia****, tem-se que*

$$\begin{aligned}\left[\left[\mathrm{tg}^3\left(\sqrt{x}\right)\right]'\right] &= p'(q(x))q'(x) \\ &= 3\mathrm{tg}^2 q(x)\,\sec^2 q(x)\frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= 3\mathrm{tg}^2\sqrt{x}\,\sec^2\sqrt{x}\frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{3}{2}\frac{\mathrm{tg}^2\sqrt{x}\,\sec^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(\sqrt{x}\right)'\mathrm{tg}^3\left(\sqrt{x}\right) + \sqrt{x}\left[\mathrm{tg}^3\left(\sqrt{x}\right)\right]' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{tg}^3\left(\sqrt{x}\right) + \sqrt{x}\frac{3}{2}\frac{\mathrm{tg}^2\sqrt{x}\,\sec^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{tg}^3\left(\sqrt{x}\right) + \frac{3}{2}\mathrm{tg}^2\sqrt{x}\,\sec^2\sqrt{x}\end{aligned}$$

□

b). *Observe que*

$$\begin{aligned}g(x) &= \left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^{17} \\ &= p(q(x))\end{aligned}$$

sendo

$$\begin{cases} p(x) = x^{17} \\ q(x) = \dfrac{1+x^2}{1-x^2} \end{cases}$$

Donde segue-se que

$$p'(x) = 17x^{16}$$

e usando a ***regra do quociente****,*

$$\begin{aligned}q'(x) &= \frac{\left(1+x^2\right)'\left(1-x^2\right) - \left(1+x^2\right)\left(1-x^2\right)'}{\left(1-x^2\right)^2} \\ &= \frac{2x(1-x^2) - (1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} \\ &= \frac{2x - 2x^3 + 2x + 2x^3}{(1-x^2)^2} \\ &= \frac{4x}{(1-x^2)^2}\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}g'(x) &= p'(q(x))q'(x) \\ &= 17\left(q(x)\right)^{16}\frac{4x}{(1-x^2)^2} \\ &= 17\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^{16}\frac{4x}{(1-x^2)^2} \\ &= 68x\frac{(1+x^2)^{16}}{(1-x^2)^{18}}\end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Sabendo-se que*

$$f(-2) = 3$$

e

$$f'(-2) = -4$$

Conclui-se que a reta tangente ao gráfico de f para $x = -2$, passa pelo ponto

$$(x_0, y_0) = (-2, 3)$$

e possui coeficiente angular

$$m = -4$$

Assim, sua equação é dada por

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$y - 3 = -4(x + 2)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$y = -4x - 5$$

■

Exercício 3 *Para verificar a continuidade de f em $x = 0$, observe que*

i) *$f(0) = 0$, ou seja $f(0)$ existe.*

ii)

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Visto que $x \to 0$ e $\left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$.

iii) *Pelos itens anteriores, tem-se que*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

Segue-se dos itens (i), (ii) e (iii) que f é contínua em $x = 0$.

Por outro lado, observe que

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right)}{h} \\ &= \nexists \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Sabendo-se que*

$$F(x) = f(g(x))$$

segue-se da ***regra da cadeia*** *que*

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

Como

$$f'(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

e

$$g(x) = \sqrt{3x - 1}$$

Tem-se que

$$\begin{aligned} f'(g(x)) &= \frac{g(x)}{(g(x))^2 + 1} \\ &= \frac{\sqrt{3x-1}}{3x - 1 + 1} \\ &= \frac{\sqrt{3x-1}}{3x} \end{aligned}$$

e

$$g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$$

Portanto

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{\sqrt{3x-1}}{3x} \frac{3}{2\sqrt{3x-1}} \\ &= \frac{1}{2x} \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Sabe-se que*

$$x^3 + x \operatorname{arctg} y = e^y$$

Derivando implicitamente em relação a x, tem-se

$$3x^2 + \operatorname{arctg} y + x\left(\operatorname{arctg} y\right)' \frac{dy}{dx} = e^y \frac{dy}{dx}$$

Lembre-se que

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} x\right) &= x & \Rightarrow \\ \sec^2\left(\operatorname{arctg} x\right)\left(\operatorname{arctg} x\right)' &= 1 & \Rightarrow \\ \left(\operatorname{arctg} x\right)' &= \frac{1}{\sec^2\left(\operatorname{arctg} x\right)} & \Rightarrow \\ \left(\operatorname{arctg} x\right)' &= \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg} x\right)} & \Rightarrow \\ \left(\operatorname{arctg} x\right)' &= \frac{1}{1 + x^2} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} 3x^2 + \operatorname{arctg} y + x\left(\operatorname{arctg} y\right)' \frac{dy}{dx} &= e^y \frac{dy}{dx} & \Rightarrow \\ x\frac{1}{1+y^2}\frac{dy}{dx} - e^y \frac{dy}{dx} &= -3x^2 - \operatorname{arctg} y & \Rightarrow \\ \left[\frac{x}{1+y^2} - e^y\right]\frac{dy}{dx} &= -3x^2 - \operatorname{arctg} y & \Rightarrow \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{-3x^2 - \operatorname{arctg} y}{\frac{x}{1+y^2} - e^y} \end{aligned}$$

■