Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Prof^o. Edson

1^o Semestre

Gabarito 1ª Prova **2017**
Data: Segunda-feira, 7 de Agosto **Turma 1X**

Exercício 1

a). *Deseja-se resolver o seguinte limite*

$$A = \lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{\operatorname{sen} \pi x}$$

Para isto, considere a seguinte mudança de variável

$$u = x - 1$$

e observe que

$$x = u + 1$$

e

$$x \to 1 \Rightarrow u \to 0$$

Substituindo no limite dado, tem-se

$$A = \lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{\operatorname{sen} \pi x}$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{1-(u+1)^2}{\operatorname{sen}\left[\pi(u+1)\right]}$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{1-u^2-2u-1}{\operatorname{sen}(\pi u+\pi)}$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{-u(u+2)}{\operatorname{sen}(\pi u)\cos\pi + \operatorname{sen}\pi\cos(\pi u)}$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{-u(u+2)}{-\operatorname{sen}(\pi u)}$$

$$= \lim_{u\to 0} (u+2)\frac{1}{\dfrac{\operatorname{sen}(\pi u)}{u}}$$

$$= \lim_{u\to 0} (u+2)\frac{1}{\dfrac{\operatorname{sen}(\pi u)}{\pi u}\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}$$

□

b). *Deseja-se resolver oseguinte limite*

$$B = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^{\frac{1}{3}}-1}{x^{\frac{1}{5}}-1}$$

Para isto, considere uma mudança de variável tal que

$$x = u^{15}$$

ou seja,

$$u = \sqrt[15]{x} = x^{\frac{1}{15}}$$

e

$$x \to 1 \Rightarrow u \to 1$$

Portanto,

$$B = \lim_{x\to 1} \frac{x^{\frac{1}{3}}-1}{x^{\frac{1}{5}}-1}$$

$$= \lim_{u\to 1} \frac{\left(u^{15}\right)^{\frac{1}{3}}-1}{\left(u^{15}\right)^{\frac{1}{5}}-1}$$

$$= \lim_{u\to 1} \frac{u^{\frac{15}{3}}-1}{u^{\frac{15}{5}}-1}$$

$$= \lim_{u\to 1} \frac{u^5-1}{u^3-1}$$

Observe que

$$u^5 - 1 = (u-1)\left(u^4+u^3+u^2+u+1\right)$$

$$u^3 - 1 = (u-1)\left(u^2+u+1\right)$$

Assim,

$$B = \lim_{u\to 1} \frac{(u-1)\left(u^4+u^3+u^2+u+1\right)}{(u-1)\left(u^2+u+1\right)}$$

$$= \lim_{u\to 1} \frac{u^4+u^3+u^2+u+1}{u^2+u+1}$$

$$= \frac{5}{3}$$

■

Exercício 2 *Para resolver o limite*

$$\lim_{x\to 5}\frac{10^x-10^5}{x-5}$$

considere

$$u=x-5$$

e observe que,

$$x\to 5\Rightarrow u\to 0$$

e

$$x=u+5$$

Logo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 5}\frac{10^x-10^5}{x-5}&=\lim_{u\to 0}\frac{10^{(u+5)}-10^5}{u}\\&=\lim_{u\to 0}\frac{10^u10^5-10^5}{u}\\&=\lim_{u\to 0}\frac{10^5\left(10^u-1\right)}{u}\end{aligned}$$

Considere agora,

$$w=10^u-1$$

e observe que,

$$u\to 0\Rightarrow w\to 0$$

e

$$u=\log_{10}(w+1)$$

Assim,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 5}\frac{10^x-10^5}{x-5}&=\lim_{u\to 0}\frac{10^5\left(10^u-1\right)}{u}\\&=10^5\lim_{w\to 0}\frac{w}{\log_{10}(w+1)}\\&=10^5\lim_{w\to 0}\frac{1}{\frac{1}{w}\log_{10}(w+1)}\\&=10^5\lim_{w\to 0}\frac{1}{\log_{10}(w+1)^{\frac{1}{w}}}\\&=10^5\frac{1}{\log_{10}e}\\&=10^5\ln 10\end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Considere*

$$C=\lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}$$

e observe inicialmente que

$$1-x^3=(1-x)\left(x^2+x+1\right)$$

Ou seja

$$\begin{aligned}C&=\lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x}-\frac{3}{(1-x)\left(x^2+x+1\right)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1-3}{(1-x)\left(x^2+x+1\right)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{(1-x)\left(x^2+x+1\right)}\end{aligned}$$

Perceba que

$$x^2+x-2=(x-1)(x+2)$$

Logo,

$$\begin{aligned}C&=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)\left(x^2+x+1\right)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{-(1-x)(x+2)}{(1-x)\left(x^2+x+1\right)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{-(x+2)}{x^2+x+1}\\&=-1\end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Considere*

$$D=\lim_{x\to p}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{p}}{x-p}$$

Para resolver este limite tome

$$u=\sqrt[n]{x}$$

donde segue-se que

$$x=u^n$$

e

$$x\to p\Rightarrow u\to\sqrt[n]{p}$$

e retornando ao limite tem-se

$$\begin{aligned}D&=\lim_{x\to p}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{p}}{x-p}\\&=\lim_{u\to\sqrt[n]{p}}\frac{u-\sqrt[n]{p}}{u^n-p}\end{aligned}$$

Observe que

$$u^n - p = (u - \sqrt[n]{p})\left(u^{n-1} + u^{n-2}\sqrt[n]{p} + u^{n-3}\sqrt[n]{p^2} + \cdots + u^2\sqrt[n]{p^{n-3}} + u\sqrt[n]{p^{n-2}} + \sqrt[n]{p^{n-1}}\right)$$

Ou seja

$$\begin{aligned} D &= \lim_{u\to\sqrt[n]{p}} \frac{u - \sqrt[n]{p}}{u^n - p} \\ &= \lim_{u\to\sqrt[n]{p}} \frac{1}{u^{n-1} + u^{n-2}\sqrt[n]{p} + \cdots + \sqrt[n]{p^{n-1}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt[n]{p^{n-1}} + \cdots + \sqrt[n]{p^{n-1}}} \\ &= \frac{1}{n\sqrt[n]{p^{n-1}}} \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Inicialmente perceba que a função*

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{4}\right), & se\ |x| < 1 \\ x, & se\ |x| \geq 1 \end{cases}$$

pode ser reescrita como

$$f(x) = \begin{cases} x, & se\ x \leq -1 \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{4}\right), & se\ -1 < x < 1 \\ x, & se\ x \geq 1 \end{cases}$$

A continuidade de f deve ser analisada em cada um dos intervalos em que suas sentenças estão definidas, além dos encontros destes.

- *Para $x \leq -1$, $f(x) = x$, ou seja f é polinomial e portanto contínua neste intervalo;*
- *Para $-1 < x < 1$,*

  $$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{4}\right) \\ &= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)} \end{aligned}$$

  Como as funções $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ são contínuas para todo $x \in \mathbb{R}$ e $\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) \neq 0$ quando $-1 < x < 1$, segue-se que f é também contínua neste intervalo;
- *Para $x \geq 1$, $f(x) = x$, ou seja f é novamente polinomila e portanto contínua neste intervalo.*
- *Para $x = -1$, tem-se que*

  i). $f(-1) = -1$, ou seja $f(-1)$ existe;

  ii).

  $$\begin{aligned} \lim_{x\to -1^-} f(x) &= \lim_{x\to -1^-} x \\ &= -1 \end{aligned}$$

  $$\begin{aligned} \lim_{x\to -1^+} f(x) &= \lim_{x\to -1^+} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{4}\right) \\ &= \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ &= -1 \end{aligned}$$

  Ou seja

  $$\lim_{x\to -1} f(x) = -1$$

  iii). Por fim, dos itens (i) e (ii) tem-se que

  $$\lim_{x\to -1} f(x) = f(-1)$$

  Diante da validade dos itens (i), (ii) e (iii) tem-se provada a continuidade da função f em $x = -1$.
- *Para $x = 1$, tem-se que*

  i). $f(1) = 1$, ou seja $f(1)$ existe;

  ii).

  $$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{4}\right) \\ &= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

  $$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} x \\ &= 1 \end{aligned}$$

  Ou seja

  $$\lim_{x\to 1} f(x) = 1$$

  iii). Por fim, dos itens (i) e (ii) tem-se que

  $$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

  Diante da validade dos itens (i), (ii) e (iii) tem-se provada a continuidade da função f em $x = 1$.

Segue-se portanto, que f contínua em $\mathbb{R}$. ■.