Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Prof^{o}. Edson

2^{o} Semestre

Gabarito Prova Final **2015**
Data: Sexta-feira, 1 de Abril **Turma MX**

Exercício 1

a). *Observe que*

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x - \ln(1+x) = \lim_{x\to+\infty} \ln\frac{x}{1+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln\frac{1}{1}\,(L'Hospital)$$

$$= \ln 1$$

$$= 0$$

□

b). *Observe agora, que*

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-\operatorname{sen} x}{3x+\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\left(2-\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}{x\left(3+\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2-\frac{\operatorname{sen} x}{x}}{3+\frac{\operatorname{sen} x}{x}}$$

$$= \frac{2-1}{3+1}$$

$$= \frac{1}{4}$$

■

Exercício 2 *Sendo*

$$f(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{x}\sqrt[3]{x+1}}{\operatorname{sen} x\sec\, x}\right)$$

Observe que

$$f(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{x}\sqrt[3]{x+1}}{\operatorname{sen} x\sec\, x}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{x}\sqrt[3]{x+1}}{\operatorname{sen} x\frac{1}{\cos x}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{x}\sqrt[3]{x+1}}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{x}\sqrt[3]{x+1}}{\operatorname{tg} x}\right)$$

Usando as propriedades do logaritmo, segue-se que

$$f(x) = \ln\sqrt{x}\sqrt[3]{x+1} - \ln\operatorname{tg} x$$

$$= \ln\sqrt{x} + \ln\sqrt[3]{x+1} - \ln\operatorname{tg} x$$

$$= \ln x^{\frac{1}{2}} + \ln\left(x+1\right)^{\frac{1}{3}} - \ln\operatorname{tg} x$$

$$= \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{3}\ln\left(x+1\right) - \ln\operatorname{tg} x$$

Portanto

$$f'(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{3\left(x+1\right)} - \frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x}$$

$$= \frac{1}{2x} + \frac{1}{3\left(x+1\right)} - \sec x\cos\sec x$$

■

Exercício 3 *Sabe-se que a partícula move-se sobre a curva $xy = 8$. Assim, temos que as coordenadas x e y desta partícula mudam com o tempo. Assim, derivando implicitamente, teremos*

$$\frac{d}{dt}\left(xy\right) = \frac{d}{dt}\left(8\right)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{dx}{dt}y + x\frac{dy}{dt} = 0$$

Também é informado no problema que a coordenada y da partícula está decrescendo a uma taxa de $3\,cm/s$ *quando atinge o ponto* $(4,2)$, *ou seja*

$$\frac{dy}{dt} = -3\,cm/s$$

Com isto segue-se que, neste instante teremos

$$\frac{dx}{dt}2 + 4\,(-3) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dt} = 6\,cm/s$$

■

Exercício 4 *Sejam b e h as dimensões do retângulo que desejamos encontrar, sendo b a base e h a altura. Do enunciado, segue-se que*

$$b \cdot h = 900$$

Dado que as margens inferior e laterais devem ter $3\,cm$ *e a superior* $5\,cm$, *segue-se que a área de impressão será de*

$$A(b,h) = (b-6)(h-8)$$

Mas, da equação anterior, temos que

$$h = \frac{900}{b}$$

Assim,

$$A(b) = (b-6)\left(\frac{900}{b} - 8\right)$$

e disto, temos

$$A'(b) = \frac{5400}{b^2} - 8$$

e

$$A''(b) = -\frac{10800}{b^3}$$

Para encontrarmos os candidatos a extremo da função A devemos resolver a seguinte equação

$$A'(b) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{5400}{b^2} - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$b = \sqrt{675} \Leftrightarrow$$

$$b = 15\sqrt{3}$$

Observe ainda que

$$h = \frac{900}{b}$$

$$= 20\sqrt{3}$$

e, além disto

$$A''(b) = -\frac{10800}{\left(15\sqrt{3}\right)^3} < 0$$

O que confirma que as dimensões $b = 15\sqrt{3}$ *e* $h = 20\sqrt{3}$*de fato maximizam a área de impressão do poster em questão.* ■

Exercício 5 *Observe que*

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

e o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $y = x^2$ *no ponto* $(1,1)$ *é, portanto*

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 2$$

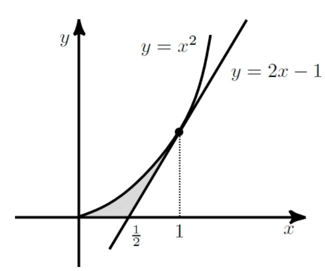
e a equação desta reta será

$$(y-1) = 2(x-1)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$y = 2x - 1$$

Observe que esta reta intersepta o eixo no ponto onde

$$y = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Realizando um esboço da região que desejamos calcular a área, teremos a seguinte figura



Ou seja

$$A = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left[x^2 - (2x-1)\right] dx$$

$$= \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{\frac{1}{2}} + \left.\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right|_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= \frac{1}{24} + \left(\frac{1}{3} - 1 + 1\right) - \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{12}$$

■