Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Prof$^{\text{o}}$. Edson

2$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito 3$^{\text{a}}$ Prova **2015**
Data: Segunda-feira, 28 de Março **Turma MX**

Exercício 1

a). *Observe que*

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x}\,(regra\,de\,L'Hospital)$$

$$= 0$$

□

b). *Observe agora, que*

$$\lim_{x\to 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln\left[(e^x+x)^{\frac{1}{x}}\right]}$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(e^x+x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(e^x+x)}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\frac{e^x+1}{e^x+x}}{1}}\,(regra\,de\,L'Hospital)$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{e^x+1}{e^x+x}}$$

$$= e^2$$

■

Exercício 2 *Sendo*

$$p(x) = x\left(x^2-1\right)^2$$

Temos que

$$p'(x) = \left(x^2-1\right)^2 + x\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x$$

$$= \left(x^2-1\right)^2 + 4x^2(x^2-1)$$

$$= (x^2-1)\left[(x^2-1)+4x^2\right]$$

$$= (x^2-1)(5x^2-1)$$

Além disso,

$$p''(x) = 2x\cdot(5x^2-1) + (x^2-1)\cdot 10x$$

$$= 10x^3 - 2x + 10x^3 - 10x$$

$$= 20x^3 - 12x$$

a). *Observe que* $x = -1, 1, -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}$ *são as raízes de* $p'(x)$*. Realizando o estudo de sinalde* $p'(x)$ *descobriremos que*

$$p'(x) > 0\,para\ x \in (-\infty,-1)\cup\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cup(1,+\infty)$$

$$p'(x) < 0\ \ para\ x \in \left(-1,-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{5}},1\right)$$

Donde segue-se que

$$p(x)\ \text{é crescente em}\ (-\infty,-1)\cup\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cup(1,+\infty)$$

$$p(x)\ \text{é decrescente em}\ \left(-1,-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{5}},1\right)$$

□

b). *Fazendo*

$$p'(x) = 0$$

ou seja,

$$(x^2-1)(5x^2-1) = 0$$

Obtemos como candidatos a extremos de $p(x)$ *os valores*

$$x = -1, 1, -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Para classificá-los, observe que

$$p''(-1) = -20 + 12 = -8 < 0$$

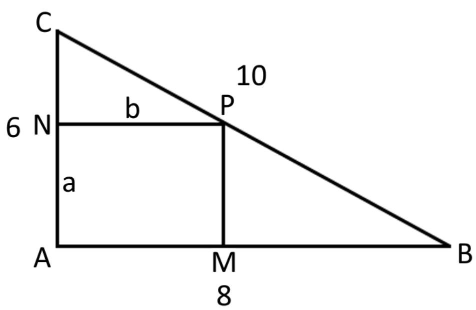
$$p''(1) = 20 - 12 = 8 > 0$$

$$p''\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{-4}{\sqrt{5}} + \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}} > 0$$

$$p''\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{12}{\sqrt{5}} = -\frac{8}{\sqrt{5}} < 0$$

Portanto, -1 *e* $\frac{1}{\sqrt{5}}$ *são máximos locais enquanto* 1 *e* $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ *são mínimos locais.* ■

Exercício 3 *Chamemos de* a *e* b *as dimensões do retângulo procurado, conforme esboçado na figura abaixo.*



Observe que os triângulos ΔMBP *e* ΔNPC *são semelhantes, uma vez que todos os ângulos correspondentes são congruentes. Assim, segue-se que*

$$\frac{MB}{MP} = \frac{NP}{NC}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\frac{8-b}{a} = \frac{b}{6-a}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$4a + 3b = 24$$

A área do retângulo é dada por

$$A(a,b) = ab$$

mas,

$$b = \frac{24-4a}{3}$$

Ou seja

$$A(a) = \frac{1}{3}\left(24a - 4a^2\right)$$

Assim

$$A'(a) = \frac{1}{3}(24 - 8a)$$

e

$$A'(a) = 0 \Rightarrow a = 3$$

Além disto, temos que

$$A''(a) = -\frac{8}{3} < 0$$

Portanto, $a = 3$ *é um valor máximo para* A *e as dimensões procuradas são*

$$a = 3$$

$$\begin{aligned} b &= \frac{24 - 4\cdot 3}{3} \\ &= 4 \end{aligned}$$

■

Exercício 4

a).

$$\begin{aligned} \int \frac{1-2t^3}{t^3}dt &= \int \left(\frac{1}{t^3} - \frac{2t^3}{t^3}\right)dt \\ &= \int \left(t^{-3} - 2\right)dt \\ &= -\frac{t^{-2}}{2} - 2t + k,\ k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

□

b).

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x\,dx &= \int \cos^2 x \cos x\,dx \\ &= \int \left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right)\cos x\,dx \\ &= \int \cos x - \operatorname{sen}^2 x \cos x\,dx \\ &= \operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + k,\ k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

■

Exercício 5

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{5\pi}{6}} \left(\operatorname{sen} x - \frac{3}{5\pi}x\right)dx \\ &= \left(-\cos x - \frac{3}{5\pi}\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{5\pi}{6}} \\ &= \left(-\cos\frac{5\pi}{6} - \frac{3}{5\pi}\frac{1}{2}\frac{5\pi}{6}\frac{5\pi}{6}\right) - (-\cos 0 - 0) \\ &= 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{24} \end{aligned}$$

■