

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Profº. Edson

2º Semestre

Gabarito 2ª Prova

Data: Segunda-feira, 29 de Fevereiro

2015

Turma MX

Exercício 1

a). Desejamos calcular a derivada da função

$$f(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2$$

Observe que

$$f(x) = p(q(x))$$

sendo

$$\begin{aligned} q(x) &= \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \\ &= x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

$$p(x) = x^2$$

com

$$\begin{aligned} q'(x) &= \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} - \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}-1} \\ &= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}} \end{aligned}$$

$$p'(x) = 2x$$

Assim, usando a regra da cadeia, temos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= p'(q(x))q'(x) \\ &= 2 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}} \right) \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{x}}{3\sqrt[3]{x^4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}} \right) \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{4}{3}}}{3} + \frac{1}{2x^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{3x^{\frac{1}{3}}x^{\frac{4}{3}}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{x^{-\frac{5}{6}}}{3} + \frac{1}{2x^{\frac{5}{6}}} - \frac{1}{3x^{\frac{5}{3}}} \right) \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3x^{\frac{5}{6}}} + \frac{1}{2x^{\frac{5}{6}}} - \frac{1}{3x^{\frac{5}{3}}} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{3x^{\frac{5}{6}}} - \frac{2}{3x^{\frac{5}{3}}} \end{aligned}$$

□

b). Desejamos agora, calcular a derivada a seguinte função

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Considere

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

sendo

$$p(x) = x$$

$$q(x) = \sqrt{x^2+1}$$

Observe que

$$p'(x) = 1$$

$$q(x) = u(v(x))$$

com

$$v(x) = x^2 + 1$$

$$u(x) = \sqrt{x}$$

e

$$v'(x) = 2x$$

$$u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Usando a regra da cadeia, segue-se que

$$\begin{aligned} q'(x) &= u'(v(x))v'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} 2x \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

e, usando a regra do quociente,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{[q(x)]^2} \\ &= \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+1} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} \\ &= \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} \\ &= \frac{\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \frac{1}{x^2+1} \\ &= \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

■

Exercício 2 Observe que

$$\begin{aligned} f(x) &= |\sin x| \\ &= \begin{cases} \sin x, & \text{se } \sin x \geq 0 \\ -\sin x, & \text{se } \sin x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sin x, & \text{se } 2k\pi \leq x \leq 2k\pi + 1 \\ -\sin x, & \text{se } 2k\pi - 1 < x < 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Assim, para $x \in (2k\pi, 2k\pi + 1)$, temos

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$$

Do mesmo modo, para $x \in (2k\pi - 1, 2k\pi)$, temos

$$f(x) = -\sin x \Rightarrow f'(x) = -\cos x$$

Para $x = 2k\pi$,

$$\begin{aligned} f'(2k\pi) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2k\pi + h) - f(2k\pi)}{h} \\ &= \begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sin(2k\pi + h) - \sin(2k\pi)}{h} \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-\sin(2k\pi + h) - \sin(2k\pi)}{h} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sin(2k\pi + h)}{h} = 1 \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-\sin(2k\pi + h)}{h} = -1 \end{cases} \\ &= \nexists \end{aligned}$$

De modo semelhante, chegamos também à conclusão de que $f'(2k\pi + 1) = \nexists$. Portanto, a função f é derivável para quaisquer valores de x exceto para $x = 2k\pi$ e $x = 2k\pi + 1$, com $k \in \mathbb{Z}$. ■

Exercício 3 O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da parábola $y = x - x^2$ no ponto $(1, 0)$ é dado por

$$\begin{aligned} m_t &= \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} \\ &= (1 - 2x)|_{x=1} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Entretanto, o coeficiente angular m_n da reta normal ao gráfico neste mesmo ponto deve obedecer à seguinte condição

$$m_n m_t = -1$$

Portanto

$$m_n = \frac{-1}{m_t} = 1$$

Assim, a equação de reta normal pedida no problema é dada por

$$(y - y_0) = m_n(x - x_0)$$

sendo $(x_0, y_0) = (1, 0)$. Ou seja

$$y = -x + 1$$

Para descobrir em qual outro ponto esta reta intercepta a parábola, devemos resolver o seguinte sistema

$$\begin{cases} y = x - x^2 \\ y = -x + 1 \end{cases}$$

Donde segue-se que $x = 1$ ou $x = -1$. Como $x = 1$ é o ponto que já tínhamos, segue-se que, o ponto procurado é $(-1, -2)$. ■

Exercício 4 Sabemos que

$$xy + e^y = e \quad (1)$$

Admitindo $y = y(x)$ e derivando implicitamente em relação a x em ambos os lados desta equação teremos

$$y + xy' + e^y y' = 0 \quad (2)$$

Repetindo o processo, agora com esta última equação, teremos

$$2y' + xy'' + e^y (y')^2 + e^y y'' = 0 \quad (3)$$

Tomando $x = 0$ na equação (1), obtemos

$$0 \cdot y(0) + e^{y(0)} = e \Rightarrow$$

$$y(0) = 1$$

Do mesmo modo, na equação (2), teremos

$$y(0) + 0 \cdot y'(0) + e^{y(0)} y'(0) = 0 \Rightarrow$$

$$1 + e^1 y'(0) = 0 \Rightarrow$$

$$y'(0) = -\frac{1}{e}$$

Por fim, substituindo $x = 0$ na equação (3), teremos

$$2y'(0) + e^{y(0)} (y'(0))^2 + e^{y(0)} y''(0) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{2}{e} + e \left(-\frac{1}{e}\right)^2 + e y''(0) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{3}{e} + e y''(0) = 0 \Rightarrow$$

$$y''(0) = -\frac{3}{e^2}$$

Exercício 5 Considerando x sendo a aresta do cubo em questão, tem-se que sua área e volume são, respectivamente

$$A(x) = 6x^2$$

$$V(x) = x^3$$

Derivando ambas as funções em relação ao tempo, teremos

$$\frac{dA}{dt} = 12x \frac{dx}{dt} \quad (4)$$

$$\frac{dV}{dt} = 3x^2 \frac{dx}{dt} \quad (5)$$

De acordo com o enunciado do problema temos que

$$\frac{dV}{dt} = 10 \text{ cm}^3 / \text{min}$$

quando $x = 30 \text{ cm}$. Assim, usando estas informações na equação (5) teremos

$$10 = 3 \cdot 30^2 \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{270} \text{ cm} / \text{min}$$

Usando agora a equação (4),

$$\frac{dA}{dt} = 12 \cdot 30 \frac{1}{270}$$

$$= \frac{4}{3} \text{ cm}^2 / \text{min}$$