

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Prof.^o Edson

1^o Semestre

Gabarito Prova Final
Data: Quarta-feira, 2 de Outubro

2013
Turma X1

Exercício 1

a). Usando a **Regra de L'Hospital** teremos

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - 3^x}{5 - 5^x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3^x \ln 3}{-5^x \ln 5} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\ln 3}{\ln 5} \right) \left(\frac{3}{5} \right)^x \\ &= +\infty\end{aligned}$$

□

b). Para resolvermos este limite observemos inicialmente que

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow x \cos x + e^{-x} \rightarrow 1$$

e

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow x^2 \rightarrow 0^+$$

Portanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x + e^{-x}}{x^2} = +\infty$$

■

Exercício 2 Considere $P = (a, b)$ como sendo o ponto da curva sobre a elipse

$$2x^2 - 4x + y^2 + 1 = 0$$

onde a reta tangente passa pela origem. Admitindo $y = f(x)$ e, usando derivação implícita sobre a equação da elipse dada, teremos

$$4x - 4 + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

ou seja

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{2 - 2x}{y}$$

Portanto, o coeficiente angular da reta que estamos procurando é dado por

$$m = f'(a) = \frac{2 - 2a}{b}$$

Aqui, estamos usando que $b = f(a)$. Além disso, como P é um ponto da elipse, segue-se que

$$2a^2 - 4a + b^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2a^2 - 4a + 2 - 2 + b^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2(a - 1)^2 + b^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$b = \pm \sqrt{1 - 2(a - 1)^2}$$

Agora, perceba que, a reta que passa pelo ponto $P = (a, b)$ com coeficiente angular m , é dada por

$$y - b = m(x - a) \Leftrightarrow$$

$$y - b = 2 \frac{(1 - a)(x - a)}{b}$$

Como a reta que procuramos deve passar pela origem, segue-se que

$$-b = 2 \frac{(1 - a)(-a)}{b} \Leftrightarrow$$

$$-b^2 = -2a + 2a^2 \Leftrightarrow$$

$$b^2 = 2a - 2a^2$$

Ou seja

$$1 - 2(a - 1)^2 = 2a - 2a^2 \Leftrightarrow$$

$$1 - 2a^2 + 4a - 2 = 2a - 2a^2 \Leftrightarrow$$

$$4a - 1 = 2a \Leftrightarrow$$

$$a = \frac{1}{2}$$

donde segue-se que

$$b = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

e

$$m = \pm \frac{2-1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \pm\sqrt{2}$$

E, as retas procuradas são

$$y = \sqrt{2}x \text{ e } y = -\sqrt{2}x$$

■

Exercício 3 Seja $P = (a, b)$ um ponto qualquer sobre o gráfico de $y = x^2 + 1$, ou seja

$$b = a^2 + 1$$

A distância entre o ponto P e o ponto $(3, 1)$ é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= \sqrt{(a-3)^2 + (b-1)^2} \\ &= \sqrt{(a-3)^2 + a^4} \\ &= \sqrt{a^4 + a^2 - 6a + 9} \end{aligned}$$

Considere a função

$$\mathbf{g}(a) = a^4 + a^2 - 6a + 9$$

e observe que, minimizando a função $\mathbf{g}$, estamos também minimizando a função $\mathbf{d}$. Para isto, perceba que

$$\mathbf{g}'(a) = 4a^3 + 2a - 6$$

e nossos candidatos a extremos são obtidos como solução da seguinte equação

$$\mathbf{g}'(a) = 0 \Rightarrow$$

$$4a^3 + 2a - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$2a^3 + a - 3 = 0$$

Donde segue-se que $a = 1$ é a única raiz real e, portanto nosso único candidato. Para confirmarmos que de fato trata-se de um ponto de mínimo para a função $\mathbf{g}$, observe que

$$\mathbf{g}''(a) = 6a^2 + 1 > 0, \forall a \in \mathbb{R}$$

Com isto, temos que $b = 2$ e o ponto procurado é $(1, 2)$. ■

Exercício 4

a). Desejamos calcular a integral

$$\int x (\ln x)^2 dx$$

Usando integração por partes, tome

$$\begin{cases} u = (\ln x)^2 \\ dv = x dx \end{cases}$$

e observe que

$$\begin{cases} du = \frac{2 \ln x}{x} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

Assim, temos que

$$\int x (\ln x)^2 dx = \frac{x^2}{2} (\ln x)^2 - \int x \ln x dx \quad (1)$$

Usando novamente o método de integração por partes, tome

$$\begin{cases} z = \ln x \\ dw = x dx \end{cases}$$

e observe que

$$\begin{cases} dz = \frac{1}{x} dx \\ w = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

donde segue-se que

$$\begin{aligned} \int x \ln x dx &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + k \end{aligned}$$

Assim, substituindo este resultado na equação (1), teremos

$$\int x (\ln x)^2 dx = \frac{x^2}{2} \left[(\ln x)^2 - \ln x + \frac{1}{2} \right] + k$$

onde $k \in \mathbb{R}$. □

b). Desejamos calcular a integral

$$\int x^2 \sqrt{x-1} dx$$

Para isto, tome $u = x - 1$ e observe que

$$du = dx$$

e

$$x = u + 1$$

Logo, segue-se que

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt{x-1} dx &= \int (u+1)^2 \sqrt{u} du \\ &= \int (u^2 + 2u + 1) u^{\frac{1}{2}} du \\ &= \int \left(u^{\frac{5}{2}} + 2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}} \right) du \\ &= \frac{2u^{\frac{7}{2}}}{7} + \frac{4u^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} + k \\ &= \frac{2(x-1)^{\frac{7}{2}}}{7} + \frac{4(x-1)^{\frac{5}{2}}}{5} + \\ &\quad + \frac{2(x-1)^{\frac{3}{2}}}{3} + k \end{aligned}$$

onde $k \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 5 Observe inicialmente que as curvas $y = -x$ e $y = x - x^2$ interceptam-se em $x = 0$ e $x = 2$. Logo a região delimitada por estas curvas está compreendida no intervalo $(0, 2)$ e a área desta região pode ser obtida através da integral

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 |x - x^2 + x| dx \\ &= \left| \int_0^2 (2x - x^2) dx \right| \\ &= \left| x^2 - \frac{x^3}{3} \right|_0^2 \\ &= \left| 4 - \frac{8}{3} \right| \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$
■