

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Prof.^o Edson

1º Semestre

Gabarito 3ª Prova
Data: Segunda-feira, 30 de Setembro

2013
Turma X1

Exercício 1 Sendo

$$f(x) = \frac{1}{12} (x^4 + 6x^3 - 18x^2)$$

teremos

$$f'(x) = \frac{1}{12} (4x^3 + 18x^2 - 36x)$$

$$= \frac{x}{6} (2x^2 + 9x - 18)$$

Então, segue-se que

$$f'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x}{6} (2x^2 + 9x - 18) = 0 \Rightarrow$$

$$x (2x^2 + 9x - 18) = 0$$

Donde segue-se que os candidatos a extremos da função f são

$$x = 0, x = \frac{3}{2} \text{ e } x = -6$$

Para classificar tais candidatos devemos utilizar a função f'' . Para isto, observe que

$$f''(x) = \frac{1}{12} (12x^2 + 36x - 36)$$

$$= x^2 + 3x - 3$$

e

$$f''(0) = -3 < 0$$

$$f''\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{15}{4} > 0$$

$$f''(-6) = 15 > 0$$

Portanto, $x = 0$ é um **ponto de máximo absoluto**, $x = \frac{3}{2}$ e $x = -6$ são pontos de **mínimo**. Como $f(\frac{3}{2}) = -\frac{81}{64}$ e $f(-6) = -54$, segue-se que $x = -6$ é um **ponto de mínimo absoluto** e $x = \frac{3}{2}$ é um **ponto de mínimo local**. ■

Exercício 2

a). Usando a **Regra de L'Hospital** teremos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x^2 - 5} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{4x\sqrt{x-1}} \\ &= \frac{1}{40} \end{aligned}$$

□

b). Novamente usaremos a **Regra de L'Hospital**:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

Exercício 3 Seja $P = (a, b)$ um ponto qualquer sobre o gráfico de $y = x^3$, ou seja

$$b = a^3$$

A distância entre o ponto P e o ponto $(4, 0)$ é dada por

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(a-4)^2 + (b-0)^2} \\ &= \sqrt{(a-4)^2 + a^6} \\ &= \sqrt{a^6 + a^2 - 8a + 16} \end{aligned}$$

Considere a função

$$\mathbf{g}(a) = a^6 + a^2 - 8a + 16$$

e observe que, minimizando a função $\mathbf{g}$, estamos também minimizando a função $\mathbf{d}$. Para isto, perceba que

$$\mathbf{g}'(a) = 6a^5 + 2a - 8$$

e nossos candidatos a extremos são obtidos como solução da seguinte equação

$$\mathbf{g}'(a) = 0 \Rightarrow$$

$$6a^5 + 2a - 8 = 0 \Rightarrow$$

$$3a^5 + a - 4 = 0$$

Donde segue-se que $a = 1$ é a única raiz real e, portanto nosso único candidato. Para confirmarmos que de fato trata-se de um ponto de mínimo para a função $\mathbf{g}$, observe que

$$\mathbf{g}''(a) = 30a^4 + 2 > 0, \forall a \in \mathbb{R}$$

Com isto, temos que $b = 1$ e o ponto procurado é $(1, 1)$. ■

Exercício 4

a). Desejamos calcular a integral

$$\int x^2(x+1)^{10} dx$$

Para isto, tome $u = x + 1$ e observe que

$$du = dx$$

e

$$x = u - 1$$

Logo, segue-se que

$$\begin{aligned} \int x^2(x+1)^{10} dx &= \int (u-1)^2 u^{10} du \\ &= \int (u^2 - 2u + 1) u^{10} du \\ &= \int (u^{12} - 2u^{11} + u^{10}) du \\ &= \frac{u^{13}}{13} - 2\frac{u^{12}}{12} + \frac{u^{11}}{11} + k \\ &= \frac{(x+1)^{13}}{13} - \frac{(x+1)^{12}}{6} + \\ &\quad + \frac{(x+1)^{11}}{11} + k \end{aligned}$$

onde $k \in \mathbb{R}$. □

b). Agora, queremos calcular a integral

$$\int e^{-x} \cos 2x dx$$

Usando integração por partes, tome

$$\begin{cases} u = e^{-x} \\ dv = \cos 2x dx \end{cases}$$

e observe que

$$\begin{cases} du = -e^{-x} dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}$$

Assim, temos que

$$\int e^{-x} \cos 2x dx = \frac{1}{2} e^{-x} \sin 2x + \frac{1}{2} \int e^{-x} \sin 2x dx \quad (1)$$

Usando novamente o método de integração por partes, tome

$$\begin{cases} z = e^{-x} \\ dw = \sin 2x dx \end{cases}$$

e observe que

$$\begin{cases} dz = -e^{-x} dx \\ w = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{cases}$$

donde segue-se que

$$\int e^{-x} \sin 2x dx = -\frac{1}{2} e^{-x} \cos 2x - \frac{1}{2} \int e^{-x} \cos 2x dx \quad (2)$$

Assim, substituindo o resultado obtido na equação (2) na equação (1), teremos

$$\begin{aligned} \int e^{-x} \cos 2x dx &= \frac{1}{2} e^{-x} \sin 2x - \frac{1}{4} e^{-x} \cos 2x - \\ &\quad - \frac{1}{4} \int e^{-x} \cos 2x dx \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\frac{5}{4} \int e^{-x} \cos 2x dx = \frac{1}{2} e^{-x} \sin 2x - \frac{1}{4} e^{-x} \cos 2x + k$$

e

$$\int e^{-x} \cos 2x dx = \frac{e^{-x}}{5} (2 \sin 2x - \cos 2x) + k$$

onde $k \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 5 Observe inicialmente que as curvas $y^2 = -4x$ e $x^2 = -4y$ interceptam-se em $x = -4$ e $x = 0$. Logo a região delimitada por estas curvas está compreendida no intervalo $(-4, 0)$ e a área desta

região pode ser obtida através da integral

$$\begin{aligned} A &= \int_{-4}^0 \left| \sqrt{-4x} - \frac{x^2}{4} \right| dx \\ &= \left| \int_{-4}^0 \sqrt{-4x} - \frac{x^2}{4} dx \right| \\ &= \left| -\frac{1}{6} \sqrt{(-4x)^3} - \frac{x^3}{12} \right|_{-4}^0 \\ &= \left| 0 - \left[-\frac{64}{6} + \frac{64}{12} \right] \right| \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

■