**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Colegiado de Engenharia Civil**
**Cálculo Diferencial e Integral I**

**Profº. Edson**

**1º Semestre**

**Gabarito 2ª Prova** **2013**
**Data: Segunda-feira, 30 de Setembro** **Turma X1**

---

**Exercício 1** *Desejamos calcular*

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$$

*onde*

**a).** $y = \sqrt[3]{2+\operatorname{tg}\,(x^2)}$

*Para isto considere*

$$v = x^2$$

$$w = 2 + \operatorname{tg} v$$

*e observe que*

$$y = \sqrt[3]{w}$$

*Assim, usando a regra da cadeia, na forma de Leibnitz, teremos que*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw}\frac{dw}{dv}\frac{dv}{dx}$$

$$= \frac{1}{3}w^{-\frac{2}{3}}\sec^2 v\,(2x)$$

$$= \frac{2x\,\sec^2 x^2}{3\sqrt[3]{[2+\operatorname{tg}\,(x^2)]^2}}$$

*Portanto,*

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \frac{2\,\sec^2 1}{3\sqrt[3]{[2+\operatorname{tg}\,(1^2)]^2}}$$

□

**b).** $y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)\left(2x^7 - x^2\right)$

*Considere*

$$p(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

$$q(x) = 2x^7 - x^2$$

*e observe que*

$$p'(x) = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$q'(x) = 14x^6 - 2x$$

*Além disto, temos que*

$$y = p(x)q(x)$$

*e, usando a regra do produto, teremos*

$$\frac{dy}{dx} = p'(x)q(x) + p(x)q'(x)$$

$$= \frac{2}{(x+1)^2}\left(2x^7 - x^2\right) + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)\left(14x^6 - 2x\right)$$

$$= \frac{2}{(x+1)^2}\left(7x^7 + 2x^6 - 7x^5 - x^2 - x + 1\right)$$

*Logo,*

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \left.\frac{2\left(7x^7 + 2x^6 - 7x^5 - x^2 - x + 1\right)}{(x+1)^2}\right|_{x=1}$$

$$= \frac{1}{2}$$

■

**Exercício 2** *Sendo*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, \text{ se } x \leq 1 \\ \\ 3x, \text{ se } x > 1 \end{cases}$$

*observe, que*

- $f(1) = 3$. *Ou seja,* $f(1)$ *existe.*
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 3x = 3;$
  $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 + x + 1 = 3;$
  *Portanto,*
  $$\lim_{x\to 1} f(x) = 3$$
- *Por fim, temos que*
  $$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

*Podemos concluir, com isto, que a função $f$ é contínua em $x = 1$.*
*Porém,*

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - 3}{h}$$

*e, para $h \to 0^+$, tem-se*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - 3}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{3(1+h) - 3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{3h}{h}$$

$$= 3$$

*por outro lado, para $h \to 0^-$, tem-se*

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h) - 3}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)^2 + (1+h) + 1 - 3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{3h + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} 3 + h$$

$$= 3$$

*Ou seja,*

$$f'(1) = 3$$

■

**Exercício 3** *Sabe-se que*

$$\frac{d}{dx}\left[f(x^2)\right] = x^2$$

*Portanto, usando a regra da cadeia, teremos*

$$f'(x^2)\,(2x) = x^2$$

*Portanto*

$$f'(x^2) = \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2}$$

■

**Exercício 4** *Observe que a reta em questão possui coeficiente angular*

$$m_2 = -\frac{1}{2}$$

*Logo, a reta que estamos procurando possui coeficiente angular $m_1$, sendo*

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

*ou seja,*

$$m_1 = 2$$

*Considere $(a, b)$ sendo o ponto sobre a curva $y^3 = 2x^2$, tal que*

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = m_1 = 2 \qquad (1)$$

*usando derivação implícita sobre a equação da curva dada, teremos*

$$3y^2\frac{dy}{dx} = 4x$$

*donde segue-se que*

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = \frac{4a}{3b^2}$$

*Como o ponto $(a, b)$ está sobre a curva, segue-se que*

$$b^3 = 2a^2 \Leftrightarrow b = \sqrt[3]{2a^2}$$

*Assim, temos*

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = \frac{4a}{3\sqrt[3]{4a^4}}$$

*Voltando à equação (1) teremos*

$$\frac{4a}{3\sqrt[3]{4a^4}} = 2 \Leftrightarrow$$

$$4a = 6\sqrt[3]{4a^4} \Leftrightarrow$$

$$2a = 3\sqrt[3]{4a^4} \Leftrightarrow$$

$$8a^3 = 27 \cdot 4a^4 \Leftrightarrow$$

$$a = \frac{2}{27}$$

*e, em conseqüência disto,*

$$b = \frac{2}{9}$$

*Ou seja, o ponto procurado é*

$$(a, b) = \left(\frac{2}{27}, \frac{2}{9}\right)$$

■

**Exercício 5** *A partícula move-se sobre a curva*

$$16x^2 + 9y^2 = 144$$

*Logo,*

$$32x\frac{dx}{dt} + 18y\frac{dy}{dt} = 0 \qquad (2)$$

*Desejamos encontrar os pontos* $(x, y)$ *onde*

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} \qquad (3)$$

*Assim, substituindo (3) em (2), teremos*

$$32x\frac{dx}{dt} + 18y\frac{dx}{dt} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(32x + 18y)\frac{dx}{dt} = 0$$

*Como* $\frac{dx}{dt} \neq 0$*, segue-se que os pontos procurados obedecem a equação*

$$32x + 18y = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{-9y}{16}$$

*Como estes pontos estão sobre a curva dada, segue-se que*

$$16\left(\frac{-9y}{16}\right)^2 + 9y^2 = 144 \Rightarrow$$

$$\frac{81y^2}{16} + 9y^2 = 144 \Rightarrow$$

$$y^2 = \frac{16 \cdot 144}{225} \Rightarrow$$

$$y = \pm\frac{16}{5}$$

*e*

$$x = \mp\frac{9}{5}$$

*Portanto, os pontos procurados são* $\left(\frac{9}{5}, -\frac{16}{3}\right)$ *e* $\left(-\frac{9}{5}, \frac{16}{3}\right)$ ■