Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Profº. Edson

1º Semestre

Gabarito 1ª Prova **2013**
Data: Sábado, 20 de Julho **Turma X1**

Exercício 1

a).

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{6+h}{3+2h}-2\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{6+h-6-4h}{3+2h}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{h-4h}{3+2h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{-3h}{3+2h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-3}{3+2h}$$

$$=-1$$

□

b). *Desejamos calcular*

$$A=\lim_{h\to -1}\frac{3-\sqrt{h^2+h+9}}{h^3+1}$$

Para isto, multiplicaremos o numerador e denominador da função em questão por

$$3+\sqrt{h^2+h+9}$$

donde, teremos

$$A=\lim_{h\to -1}\frac{9-h^2-h-9}{(h^3+1)\left(3+\sqrt{h^2+h+9}\right)}$$

$$=\lim_{h\to -1}\frac{-h(h+1)}{(h^3+1)\left(3+\sqrt{h^2+h+9}\right)}$$

$$=\lim_{h\to -1}\frac{-h(h+1)}{(h+1)\left(h^2-h+1\right)\left(3+\sqrt{h^2+h+9}\right)}$$

$$=\lim_{h\to -1}\frac{-h}{\left(h^2-h+1\right)\left(3+\sqrt{h^2+h+9}\right)}$$

$$=\frac{1}{18}$$

■

Exercício 2

a).

$$\lim_{t\to -1^+}\left(\frac{3}{t+1}-\frac{5}{t^2-1}\right)=\lim_{t\to -1^+}\frac{3t-3-5}{t^2-1}$$

$$=\lim_{t\to -1^+}\frac{3t-8}{(t+1)(t-1)}$$

Observe que, quando $t\to -1^+$ temos

$$t>-1\Rightarrow t+1>0\Rightarrow t+1\to 0^+,$$

$$t-1\to -2,$$

e

$$3t-8\to -11$$

Ou seja

$$\lim_{t\to -1^+}\left(\frac{3}{t+1}-\frac{5}{t^2-1}\right)=+\infty$$

□

b).

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{7x^3-15x^2}{13x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3\left(7-\dfrac{15}{x}\right)}{13x}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2\left(7-\dfrac{15}{x}\right)}{13}$$

$$=+\infty$$

■

Exercício 3 *Para que a função f seja contínua $x=4$ devemos ter que*

i). *$f(4)$ existe!*

Para isto, observe que

$$f(4) = 20 + k$$

ou seja, $f(4)$ depende da constante k, mas existe.

ii). $\lim_{x\to 4} f(x)$ *existe!*

Para isto, é necessário que

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^-} f(x)$$

ou seja

$$\lim_{x\to 4^+} 5x + k = \lim_{x\to 4^-} 3x + 2 \Leftrightarrow$$

$$20 + k = 14 \Leftrightarrow$$

$$k = -6$$

iii). *Por fim,*

$$\lim_{x\to 4} f(x) = f(4)$$

ou seja, devemos ter mais uma vez que

$$14 = 20 + k \Leftrightarrow k = -6$$

Portanto, $k = -6$. ■

Exercício 4

a).

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{4x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{4x}\frac{1+\cos 2x}{1+\cos 2x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 2x}{4x\,(1+\cos 2x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{4x\,(1+\cos 2x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}\frac{\operatorname{sen} 2x}{2\,(1+\cos 2x)}$$

$$= 0$$

□

b). *Desejamos calcular*

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\dfrac{\pi}{2} - x}{\cos x}$$

Tome

$$y = x - \frac{\pi}{2}$$

Observe que

$$x \to \frac{\pi}{2} \Rightarrow y \to 0$$

e

$$x = y + \frac{\pi}{2}$$

Portanto, segue-se disto que

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\dfrac{\pi}{2} - x}{\cos x} = \lim_{y\to 0} \frac{-y}{\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{-y}{\cos y \cos\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} y \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{-y}{-\operatorname{sen} y}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{1}{\dfrac{\operatorname{sen} y}{y}}$$

$$= 1$$

■

Exercício 5

a).

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x} - e^{2x}}{x} = \lim_{x\to 0} e^{2x}\frac{e^x - 1}{x}$$

Tome

$$y = e^x - 1$$

Observe que

$$x \to 0 \Rightarrow y \to 0$$

e

$$x = \ln(y+1)$$

Portanto, segue-se disto que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{2x}}{x} &= \lim_{x\to 0} e^{2x}\frac{e^{x}-1}{x}\\
&= \lim_{y\to 0}(y-1)^2\frac{y}{\ln(y+1)}\\
&= \lim_{y\to 0}\frac{(y-1)^2}{\frac{1}{y}\ln(y+1)}\\
&= \lim_{y\to 0}\frac{(y-1)^2}{\ln(y+1)^{\frac{1}{y}}}\\
&= 1
\end{aligned}$$

$\square$

b). *Desejamos calcular*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{n}$$

Para isto, tome y de tal forma que

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{3n}$$

ou seja,

$$y = 3n$$

Assim, teremos que

$$n\to+\infty \Rightarrow y\to+\infty$$

e

$$n=\frac{y}{3}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{n} &= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{y}{3}}\\
&= \lim_{y\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{\frac{1}{3}}\\
&= \sqrt[3]{e}
\end{aligned}$$

$\blacksquare$