Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Profº. Edson

1º Semestre

Gabarito Prova Final **2013**
Data: Quarta-feira, 2 de Outubro **Turma M1**

Exercício 1

a). *Usando a* ***Regra de L'Hospital*** *teremos*

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-5} = \lim_{x\to 5}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 5}\frac{1}{4x\sqrt{x-1}}$$

$$= \frac{1}{40}$$

$\square$

b). *Novamente usaremos a* ***Regra de L'Hospital****:*

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}$$

$$= 0$$

$\blacksquare$

Exercício 2 *Observe que a reta em questão possui coeficiente angular*

$$m_2 = -\frac{1}{2}$$

Logo, a reta que estamos procurando possui coeficiente angular m_1, sendo

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

ou seja,

$$m_1 = 2$$

Considere (a,b) sendo o ponto sobre a curva $y^3 = 2x^2$, tal que

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = m_1 = 2 \qquad (1)$$

usando derivação implícita sobre a equação da curva dada, teremos

$$3y^2\frac{dy}{dx} = 4x$$

donde segue-se que

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = \frac{4a}{3b^2}$$

Como o ponto (a,b) está sobre a curva, segue-se que

$$b^3 = 2a^2 \Leftrightarrow b = \sqrt[3]{2a^2}$$

Assim, temos

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = \frac{4a}{3\sqrt[3]{4a^4}}$$

Voltando à equação (1) teremos

$$\frac{4a}{3\sqrt[3]{4a^4}} = 2 \Leftrightarrow$$

$$4a = 6\sqrt[3]{4a^4} \Leftrightarrow$$

$$2a = 3\sqrt[3]{4a^4} \Leftrightarrow$$

$$8a^3 = 27\cdot 4a^4 \Leftrightarrow$$

$$a = \frac{2}{27}$$

e, em conseqüência disto,

$$b = \frac{2}{9}$$

Ou seja, o ponto procurado é

$$(a,b) = \left(\frac{2}{27}, \frac{2}{9}\right)$$

$\blacksquare$

Exercício 3 *Seja* $P = (a, b)$ *um ponto qualquer sobre o gráfico de* $y = x^3$*, ou seja*

$$b = a^3$$

A distância entre o ponto P *e o ponto* $(4, 0)$ *é dada por*

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= \sqrt{(a-4)^2 + (b-0)^2} \\ &= \sqrt{(a-4)^2 + a^6} \\ &= \sqrt{a^6 + a^2 - 8a + 16} \end{aligned}$$

Considere a função

$$\mathbf{g}(a) = a^6 + a^2 - 8a + 16$$

e observe que, minimizando a função $\mathbf{g}$*, estamos também minimizando a função* $\mathbf{d}$*. Para isto, perceba que*

$$\mathbf{g}'(a) = 6a^5 + 2a - 8$$

e nossos candidatos a extremos são obtidos como solução da seguinte equação

$$\begin{aligned} \mathbf{g}'(a) = 0 &\Rightarrow \\ 6a^5 + 2a - 8 = 0 &\Rightarrow \\ 3a^5 + a - 4 = 0 & \end{aligned}$$

Donde segue-se que $a = 1$ *é a única raíz real e, portanto nosso único candidato. Para confirmarmos que de fato trata-se de um ponto de mínimo para a função* $\mathbf{g}$*, observe que*

$$\mathbf{g}''(a) = 30a^4 + 2 > 0, \forall a \in \mathbb{R}$$

Com isto,temos que $b = 1$ *e o ponto procurado é* $(1, 1)$*.* ■

Exercício 4

a). *Desejamos calcular a integral*

$$\int x^2(x+1)^{10}dx$$

Para isto, tome $u = x + 1$ *e observe que*

$$du = dx$$

e

$$x = u - 1$$

Logo, segue-se que

$$\begin{aligned} \int x^2(x+1)^{10}dx &= \int (u-1)^2 u^{10} du \\ &= \int (u^2 - 2u + 1)u^{10} du \\ &= \int \left(u^{12} - 2u^{11} + u^{10}\right) du \\ &= \frac{u^{13}}{13} - 2\frac{u^{12}}{12} + \frac{u^{11}}{11} + k \\ &= \frac{(x+1)^{13}}{13} - \frac{(x+1)^{12}}{6} + \\ &\quad + \frac{(x+1)^{11}}{11} + k \end{aligned}$$

onde $k \in \mathbb{R}$*.* □

b). *Agora, queremos calcular a integral*

$$\int e^{-x} \cos 2x \, dx$$

Usando integração por partes, tome

$$\begin{cases} u = e^{-x} \\ dv = \cos 2x \, dx \end{cases}$$

e observe que

$$\begin{cases} du = -e^{-x} dx \\ v = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x \end{cases}$$

Assim, temos que

$$\int e^{-x} \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} e^{-x} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2} \int e^{-x} \operatorname{sen} 2x dx \tag{2}$$

Usando novamente o método de integração por partes, tome

$$\begin{cases} z = e^{-x} \\ dw = \operatorname{sen} 2x \, dx \end{cases}$$

e observe que

$$\begin{cases} dz = -e^{-x} dx \\ w = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{cases}$$

donde segue-se que

$$\int e^{-x}\operatorname{sen} 2x dx = -\frac{1}{2}e^{-x}\cos 2x - \frac{1}{2}\int e^{-x}\cos 2x dx \tag{3}$$

Assim, substituindo o resultado obtido na equação (2) na equação (1), teremos

$$\int e^{-x}\cos 2x\, dx = \frac{1}{2}e^{-x}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{4}e^{-x}\cos 2x - \\ -\frac{1}{4}\int e^{-x}\cos 2x dx$$

Ou seja,

$$\frac{5}{4}\int e^{-x}\cos 2x\, dx = \frac{1}{2}e^{-x}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{4}e^{-x}\cos 2x + k$$

e

$$\int e^{-x}\cos 2x\, dx = \frac{e^{-x}}{5}\left(2\operatorname{sen} 2x - \cos 2x\right) + k$$

onde $k \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 5 *Observe inicialmente que as curvas $y^2 = -4x$ e $x^2 = -4y$ interceptam-se em $x = -4$ e $x = 0$. Logo a região delimitada por estas curvas está compreendida no intervalo $(-4, 0)$ e a área desta região pode ser obtida através da integral*

$$A = \int_{-4}^{0}\left|\sqrt{-4x} - \frac{x^2}{4}\right| dx$$

$$= \left|\int_{-4}^{0}\sqrt{-4x} - \frac{x^2}{4}dx\right|$$

$$= \left|-\frac{1}{6}\sqrt{(-4x)^3} - \frac{x^3}{12}\right|_{-4}^{0}$$

$$= \left|0 - \left[-\frac{64}{6} + \frac{64}{12}\right]\right|$$

$$= \frac{16}{3}$$

■