Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Prof$^{\text{o}}$. Edson

1$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito 3ª Prova **2013**
Data: Segunda-feira, 30 de Setembro **Turma M1**

Exercício 1 *Sendo*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, \; se\, x \geq 1 \\ \\ 1 - x^2, \; se\, x < 1 \end{cases}$$

Teremos

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, \; se\, x > 1 \\ \\ -2x, \; se\, x < 1 \end{cases}$$

e

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)}{h}$$

mas,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(1+h)^2 - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h}$$

$$= 2$$

e

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{1 - (1+h)^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{1 - 1 - 2h - h^2}{h}$$

$$= -2$$

ou seja

$$f'(1) = \nexists$$

Observe, entretanto que, fazendo

$$f'(x) = 0$$

teremos como candidato oponto $x = 0$ e, além disto temos que

$$f''(x) = -2, \; se \; x < 1$$

e, isto nos permite afirmar que $x = 0$ é um ***ponto de máximo absoluto****, haja visto que é o único candidato.Embora $f'(1)$ não exista, se observarmos o gráfico de f poderemos perceber que $x = 1$ é um* ***ponto de mínimo local****.* ■

Exercício 2

a). *Usando a* ***Regra de L'Hospital*** *teremos*

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3 - 3^x}{5 - 5^x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-3^x \ln 3}{-5^x \ln 5}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\ln 3}{\ln 5}\right) \left(\frac{3}{5}\right)^x$$

$$= +\infty$$

□

b). *Para resolvermos este limite observemos inicialmente que*

$$x \to 0 \Rightarrow x \cos x + e^{-x} \to 1$$

e

$$x \to 0 \Rightarrow x^2 \to 0^+$$

Portanto

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cos x + e^{-x}}{x^2} = +\infty$$

■

Exercício 3 *Seja $P = (a, b)$ um ponto qualquer sobre o gráfico de $y = x^2 + 1$, ou seja*

$$b = a^2 + 1$$

A distância entre o ponto P e o ponto $(3, 1)$ é dada por

$$\mathbf{d} = \sqrt{(a-3)^2 + (b-1)^2}$$

$$= \sqrt{(a-3)^2 + a^4}$$

$$= \sqrt{a^4 + a^2 - 6a + 9}$$

Considere a função

$$\mathbf{g}(a) = a^4 + a^2 - 6a + 9$$

e observe que, minimizando a função $\mathbf{g}$*, estamos também minimizando a função* $\mathbf{d}$*. Para isto, perceba que*

$$\mathbf{g}'(a) = 4a^3 + 2a - 6$$

e nossos candidatos a extremos são obtidos como solução da seguinte equação

$$\mathbf{g}'(a) = 0 \Rightarrow$$

$$4a^3 + 2a - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$2a^3 + a - 3 = 0$$

Donde segue-se que $a = 1$ *é a única raíz real e, portanto nosso único candidato. Para confirmarmos que de fato trata-se de um ponto de mínimo para a função* $\mathbf{g}$*, observe que*

$$\mathbf{g}''(a) = 6a^2 + 1 > 0, \forall a \in \mathbb{R}$$

Com isto,temos que $b = 2$ *e o ponto procurado é* $(1, 2)$*.* ■

Exercício 4

a). *Desejamos calcular a integral*

$$\int x\,(\ln x)^2\,dx$$

Usando integração por partes, tome

$$\begin{cases} u = (\ln x)^2 \\ dv = x\,dx \end{cases}$$

e observe que

$$\begin{cases} du = \dfrac{2\ln x}{x}dx \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

Assim, temos que

$$\int x\,(\ln x)^2\,dx = \frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \int x \ln x dx \qquad (1)$$

Usando novamente o método de integração por partes, tome

$$\begin{cases} z = \ln x \\ dw = x\,dx \end{cases}$$

e observe que

$$\begin{cases} dz = \dfrac{1}{x}dx \\ w = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

donde segue-se que

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + k$$

Assim, substituindo este resultado na equação (1), teremos

$$\int x\,(\ln x)^2\,dx = \frac{x^2}{2}\left[(\ln x)^2 - \ln x + \frac{1}{2}\right] + k$$

onde $k \in \mathbb{R}$*.* □

b). *Desejamos calcular a integral*

$$\int x^2\sqrt{x-1}dx$$

Para isto, tome $u = x - 1$ *e observe que*

$$du = dx$$

e

$$x = u + 1$$

Logo, segue-se que

$$\int x^2\sqrt{x-1}dx = \int (u+1)^2\sqrt{u}du$$

$$= \int (u^2 + 2u + 1)u^{\frac{1}{2}}du$$

$$= \int \left(u^{\frac{5}{2}} + 2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}\right)du$$

$$= \frac{2u^{\frac{7}{2}}}{7} + \frac{4u^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} + k$$

$$= \frac{2(x-1)^{\frac{7}{2}}}{7} + \frac{4(x-1)^{\frac{5}{2}}}{5} +$$
$$+ \frac{2(x-1)^{\frac{3}{2}}}{3} + k$$

onde $k \in \mathbb{R}$*.* ■

Exercício 5 *Observe inicialmente que as curvas $y = -x$ e $y = x - x^2$ interceptam-se em $x = 0$ e $x = 2$. Logo a região delimitada por estas curvas está compreendida no intervalo $(0, 2)$ e a área desta região pode ser obtida através da integral*

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^2 \left|x - x^2 + x\right| dx \\
&= \left|\int_0^2 (2x - x^2) dx\right| \\
&= \left|x^2 - \frac{x^3}{3}\right|_0^2 \\
&= \left|4 - \frac{8}{3}\right| \\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

■