Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Prof^{o}. Edson

1^{o} Semestre

Gabarito 2ª Prova **2013**
Data: Sábado, 7 de Setembro **Turma M1**

Exercício 1 *Desejamos calcular*

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$$

onde

a). $y = \left[sen\left(\frac{3}{x}\right)\right]^{\frac{5}{2}}$

Para isto considere

$$v = \frac{3}{x}$$

$$w = sen\, v$$

e observe que

$$y = w^{\frac{5}{2}}$$

Assim, usando a regra da cadeia, na forma de Leibnitz, teremos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw}\frac{dw}{dv}\frac{dv}{dx}$$

$$= \frac{5}{2}w^{\frac{3}{2}}\cos v\left(-\frac{3}{x^2}\right)$$

$$= -\frac{15}{2x^2}\left[\text{sen}\left(\frac{3}{x}\right)\right]^{\frac{3}{2}}\cos\left(\frac{3}{x}\right)$$

Portanto,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = -\frac{15}{2}\text{sen}^{\frac{3}{2}}3\cos 3$$

□

b). $y = \left(\frac{3x+2}{x}\right)\left(x^{-5}+1\right)$

Considere

$$p(x) = \frac{3x+2}{x}$$

$$q(x) = x^{-5}+1$$

e observe que

$$p'(x) = \frac{3x-(3x+2)}{x^2} = -\frac{2}{x^2}$$

$$q'(x) = -5x^{-6} = -\frac{5}{x^6}$$

Além disto, temos que

$$y = p(x)q(x)$$

e, usando a regra do produto, teremos

$$\frac{dy}{dx} = p'(x)q(x) + p(x)q'(x)$$

$$= \left(-\frac{2}{x^2}\right)\left(x^{-5}+1\right) + \left(\frac{3x+2}{x}\right)\left(-\frac{5}{x^6}\right)$$

$$= -\frac{2+2x^5}{x^7} - \frac{15x+10}{x^7}$$

$$= \frac{-2x^5-15x-12}{x^7}$$

Logo,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \left.\frac{-2x^5-15x-12}{x^7}\right|_{x=1} = -29$$

■

Exercício 2 *Sendo*

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2, \text{ se } x \leq 1 \\ x+2, \text{ se } x > 1 \end{cases}$$

observe, que

- $f(1) = 3$. *Ou seja, $f(1)$ existe.*
- $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x+2 = 3$;
  $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2+2 = 3$;
  Portanto,
  $$\lim_{x\to 1} f(x) = 3$$
- *Por fim, temos que*
  $$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

Podemos concluir, com isto, que a função f é contínua em $x=1$.
Porém,

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-3}{h}$$

e, para $h\to 0^+$, tem-se

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-3}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{(1+h)+2-3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}$$

$$=1$$

por outro lado, para $h\to 0^-$, tem-se

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-3}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(1+h)^2+2-3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{1+2h+h^2-1}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-}2+h$$

$$=2$$

Ou seja,

$$f'(1)=\nexists$$

■

Exercício 3 *É dado que*

$$F(x)=f(g(x))$$

Portanto, usando a regra da cadeia, teremos

$$F'(x)=f'(g(x))\,g'(x)$$

Como

$$f'(x)=\sqrt{3x+4}$$

e

$$g(x)=x^2-1$$

segue-se que

$$f'(g(x))=\sqrt{3g(x)+4}$$

$$=\sqrt{3\left(x^2-1\right)+4}$$

$$=\sqrt{3x^2+1}$$

e

$$g'(x)=2x$$

Assim,

$$F'(x)=2x\sqrt{3x^2+1}$$

■

Exercício 4 *Considere $P=(a,b)$ como sendo o ponto da curva sobre a elipse*

$$2x^2-4x+y^2+1=0$$

onde a reta tangente passa pela origem. Admitindo $y=f(x)$ e, usando derivação implícita sobre a equação da elipse dada, teremos

$$4x-4+2y\frac{dy}{dx}=0$$

ou seja

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{2-2x}{y}$$

Portanto, o coeficiente angular da reta que estamos procurando é dado por

$$m=f'(a)=\frac{2-2a}{b}$$

Aqui, estamos usando que $b=f(a)$. Além disso, como P é um ponto da elipse, segue-se que

$$2a^2-4a+b^2+1=0\Leftrightarrow$$

$$2a^2-4a+2-2+b^2+1=0\Leftrightarrow$$

$$2(a-1)^2+b^2=1\Leftrightarrow$$

$$b=\pm\sqrt{1-2(a-1)^2}$$

Agora, perceba que, a reta que passa pelo ponto $P=(a,b)$ com coeficiente angular m, é dada por

$$y-b=m(x-a)\Leftrightarrow$$

$$y-b=2\frac{(1-a)(x-a)}{b}$$

Como a reta que procuramos deve passar pela origem, segue-se que

$$-b=2\frac{(1-a)(-a)}{b}\Leftrightarrow$$

$$-b^2=-2a+2a^2\Leftrightarrow$$

$$b^2=2a-2a^2$$

Ou seja

$$1-2(a-1)^2 = 2a-2a^2 \Leftrightarrow$$

$$1-2a^2+4a-2 = 2a-2a^2 \Leftrightarrow$$

$$4a-1 = 2a \Leftrightarrow$$

$$a = \frac{1}{2}$$

donde segue-se que

$$b = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

e

$$m = \pm\frac{2-1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \pm\sqrt{2}$$

E, as retas procuradas são

$$y = \sqrt{2}x \,\mathrm{e}\, y = -\sqrt{2}x$$

$\blacksquare$

Exercício 5 *Como a partícula está movendo-se sobre a curva*

$$y = \frac{x}{x^2+1}$$

segue-se que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{x^2+1-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}\frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}\frac{dx}{dt}$$

Estamos interessados nos pontos sobre esta curva onde

$$\frac{dx}{dt} = 3\frac{dy}{dt}$$

Então,

$$\frac{dy}{dt} = 3\frac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}\frac{dy}{dt}$$

donde teremos

$$3\frac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$-3x^2+3 = x^4+2x^2+1 \Leftrightarrow$$

$$x^4+5x^2-2 = 0$$

e, resolvendo a equação bi-quadrada, teremos

$$x = \pm\sqrt{\frac{-5+\sqrt{33}}{2}}$$

$\blacksquare$