Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Prof$^{\text{o}}$. Edson

1$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito 1$^{\text{a}}$ Prova **2013**
Data: Sexta-feira, 19 de Julho **Turma M1**

Exercício 1

a).

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{6+t}-\sqrt{6}}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{6+t}-\sqrt{6}}{t}\frac{\sqrt{6+t}+\sqrt{6}}{\sqrt{6+t}+\sqrt{6}}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{6+t-6}{t\left(\sqrt{6+t}+\sqrt{6}\right)}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t}{t\left(\sqrt{6+t}+\sqrt{6}\right)}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{6+t}+\sqrt{6}\right)}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

□

b).

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[1-\frac{1}{(x+1)^2}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\frac{(x+1)^2-1}{(x+1)^2}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x+1-1}{x(x+1)^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{x(x+1)^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(x+2)}{(x+1)^2}$$

$$= 2$$

■

Exercício 2

a).

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^{99}-x^{98}}{x^{100}-x^{99}} = \lim_{x\to +\infty}\frac{x^{100}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^{100}\left(1-\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}$$

$$= 0$$

□

b).

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2+5x+1}{x^2-2x-3} = \lim_{x\to 3^+}\frac{x^2+5x+1}{(x-3)(x+1)}$$

Observe que, quando $x\to 3^+$ temos

$$x>3 \Rightarrow x-3>0 \Rightarrow x-3\to 0^+,$$

$$x+1\to 4,$$

e

$$x^2+5x+1\to 25$$

Ou seja

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2+5x+1}{x^2-2x-3} = +\infty$$

■

Exercício 3 *Para que a função f seja contínua $x=-1$ devemos ter que*

i). *$f(-1)$ existe!*

Para isto, observe que

$$f(-1) = -k-3$$

ou seja, $f(-1)$ depende da constante k, mas existe.

ii). $\lim_{x\to -1} f(x)$ *existe!*

Para isto, é necessário que

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^-} f(x)$$

ou seja

$$\lim_{x\to -1^+} x^2+4 = \lim_{x\to -1^-} kx-3 \Leftrightarrow$$

$$5 = -k-3 \Leftrightarrow$$

$$k=-8$$

iii). *Por fim,*

$$\lim_{x\to -1} f(x) = f(-1)$$

ou seja, devemos ter mais uma vez que

$$5=-k-3 \Leftrightarrow k=-8$$

Portanto, $k=-8$. ■

Exercício 4

a).

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

$$= \frac{1}{2}$$

□

b).

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{1-\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{3}{\dfrac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{3}{\dfrac{\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{4}x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{3}{\frac{1}{4}\left[\dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)}\right]^2}$$

$$= 12$$

■

Exercício 5

a).

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-5}\right)^x = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3x-5+5+1}{3x-5}\right)^x$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3x-5}{3x-5}+\frac{6}{3x-5}\right)^x$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{6}{3x-5}\right)^x$$

Tome y *de tal forma que*

$$\frac{1}{y} = \frac{6}{3x-5}$$

ou seja

$$y = \frac{3x-5}{6}$$

Observe que

$$x\to +\infty \Rightarrow y\to +\infty$$

e

$$x = \frac{6y+5}{3}$$

Portanto, segue-se disto que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-5}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{6}{3x-5}\right)^x$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{6y+5}{3}}$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^2\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{5}{3}}$$

$$= e^2$$

$\square$

b). *Desejamos calcular*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^n$$

Para isto, tome y de tal forma que

$$\frac{1}{y} = \frac{4}{n}$$

ou seja,

$$y = \frac{n}{4}$$

Assim, teremos que

$$n \to +\infty \Rightarrow y \to +\infty$$

e

$$n = 4y$$

Portanto,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^n = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{4y}$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^4$$

$$= e^4$$

$\blacksquare$