

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral I

Prof. Edson

2º Semestre

Gabarito Prova Final
Data: Quinta-feira, 09 de Dezembro

2010
Turma C1

Exercício 1

a). Considere

$$A = \lim_{x \rightarrow \pi^-} (x - \pi) \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$$

e observe que

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{(x - \pi) \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}(x - \pi) \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{-\frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= -2 \end{aligned}$$

□

b).

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cos 3x}{x^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{3 \operatorname{sen} 3x}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{9 \cos 3x}{2} \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

■

Exercício 2 Considere

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 2}$$

Observe que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(x^2 - 2) - x^2(2x)}{(x^2 - 2)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 4x - 2x^3}{(x^2 - 2)^2} \\ &= \frac{-4x}{(x^2 - 2)^2} \end{aligned}$$

e, derivando mais uma vez, teremos

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-4(x^2 - 2)^2 + 4x[2(x^2 - 2)(2x)]}{(x^2 - 2)^4} \\ &= \frac{-4(x^2 - 2)^2 + 16x^2(x^2 - 2)}{(x^2 - 2)^4} \\ &= \frac{-4(x^2 - 2)(x^2 - 2 - 4x^2)}{(x^2 - 2)^4} \\ &= \frac{4(3x^2 + 2)}{(x^2 - 2)^3} \end{aligned}$$

■

Exercício 3 Seja (x_0, y_0) o ponto sobre a curva $y^2 = 2x^3$ cuja reta é perpendicular à reta $4x - 3y + 1 = 0$. Derivando implicitamente, em relação a x , a equação da curva dada, teremos

$$2y \frac{dy}{dx} = 6x^2 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{y}$$

de modo que, no ponto (x_0, y_0) teremos a inclinação da reta mencionada no problema, ou seja

$$m_1 = \frac{dy}{dx}(x_0, y_0) = \frac{3x_0^2}{y_0}$$

e, como (x_0, y_0) pertence ao gráfico de f , temos também que

$$y_0^2 = 2x_0^3$$

Assim, a equação desta reta, em função de x_0 e y_0 é dada por

$$y - y_0 = m_1(x - x_0)$$

ou seja

$$y - y_0 = \frac{3x_0^2}{y_0}(x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$yy_0 - y_0^2 = 3x_0^2(x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{3x_0^2}{y_0}x - \frac{x_0^3}{y_0}$$

Como esta reta deve ser perpendicular à reta $4x - 3y + 1 = 0$ que possui coeficiente angular

$$m_2 = \frac{4}{3}$$

pela condição de perpendicularidade entre duas retas, teremos então que

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \Leftrightarrow \frac{3x_0^2}{y_0} \frac{4}{3} = -1 \Leftrightarrow y_0 = -4x_0^2$$

e a equação da reta procurada é

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{x_0}{4}$$

Observe que esta reta também deve passar pelo ponto (x_0, y_0) e disto segue-se que

$$y_0 = -\frac{3}{4}x_0 + \frac{x_0}{4} \Leftrightarrow$$

$$-4x_0^2 = -\frac{2x_0}{4} \Leftrightarrow$$

$$-8x_0^2 + x_0 = 0$$

$$x_0(1 - 8x_0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_0 = 0 \text{ ou } x_0 = \frac{1}{8}$$

Quando $x_0 = 0$, teremos $y_0 = 0$ e, neste caso $\frac{dy}{dx}(0, 0)$ não existe, ou seja a curva não é diferenciável neste ponto. Assim, o ponto que procuramos é $(\frac{1}{8}, -\frac{1}{16})$. ■

Exercício 4 Seja (x_0, y_0) um dos cantos superiores do retângulo. Por simetria segue-se que $(-x_0, y_0)$ é o outro canto superior e os pontos $(x_0, 0)$ e $(-x_0, 0)$ são os cantos inferiores deste retângulo. Assim, podemos concluir que a base do retângulo é dada por

$$b = 2x_0$$

e a altura é

$$h = y_0 = 16 - x_0^2$$

Com isto, sua área é dada por

$$A(x_0) = 2x_0(16 - x_0^2)$$

e, a solução deste problema resume-se a encontrar um ponto de máximo da função A . Isto pode ser feito resolvendo-se a equação

$$A'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

Observe que

$$A''(x_0) = -12x_0 \Rightarrow A''\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{48}{\sqrt{3}} < 0$$

o que demonstra que o ponto $x_0 = \frac{4}{\sqrt{3}}$ é realmente um ponto de máximo da função A . E, concluindo, as dimensões do retângulo que procuramos são

$$b = \frac{8}{\sqrt{3}}$$

$$h = \frac{32}{3}$$

■

Exercício 5

a). Queremos calcular a integral

$$\int \cos^3 x \sin x dx$$

Para isto tome

$$y = \cos x$$

e observe que

$$dy = -\sin x dx$$

Logo

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x \sin x dx &= -\int y^3 dy \\ &= -\frac{1}{4}y^4 + k \\ &= -\frac{1}{4}\cos^4 x + k \end{aligned}$$

onde $k \in \mathbb{R}$. □

b). Procedendo do mesmo, considere a integral

$$\int x^2 e^{-2x^3} dx$$

Tome

$$y = -2x^3$$

e observe que

$$dy = -6x^2 dx \Leftrightarrow x^2 dx = -\frac{1}{6} dy$$

Logo

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{-2x^3} dx &= -\frac{1}{6} \int e^y dy \\ &= -\frac{1}{6} e^y + k \\ &= -\frac{1}{6} e^{-2x^3} + k \end{aligned}$$

onde $k \in \mathbb{R}$. ■